

Zahlentheorie II - Lösungen

Aktualisiert: 21. Februar 2017

vers. 2.0.11

Kongruenzen I

1. Ist $m > 1$ und a eine ganze Zahl, dann ist genau einer der Zahlen

$$a, a + 1, a + 2, \dots, a + m - 1$$

durch m teilbar.

Lösung: Die Zahlen $a, \dots, a + m - 1$ haben alle verschiedene Restklassen modulo m . Da es m Zahlen sind, hat genau eine die Restklasse 0, ist also durch m teilbar.

2. $p, p + 4$ und $p + 14$ sind Primzahlen. Finde p .

Lösung: Schaut man die Zahlen modulo 3 an, sieht man, dass

$$p \equiv p, \quad p + 4 \equiv p + 1, \quad p + 14 \equiv p + 2 \pmod{3}$$

Das heisst, 3 teilt eine dieser Zahlen. Da diese aber prim sind, muss diese Zahl 3 sein. Dies liefert die Lösung $\{3, 7, 17\}$.

3. Sind x und y ungerade natürliche Zahlen, dann ist $x^2 + y^2$ keine Quadratzahl.

Lösung: Wir betrachten die Quadrate modulo 4:

| | | | | |
|-------|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| x^2 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Die ungeraden Zahlen sind also immer kongruent 1. Das heisst

$$x^2 + y^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$$

Damit ist $x^2 + y^2$ sicher durch zwei teilbar, aber nicht durch 4. Damit kann dies keine Quadratzahl sein.

4. Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $4k + 3$ gibt.

Lösung: Wir nehmen an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen der Form $4k + 3$ und bezeichnen diese als p_1, p_2, \dots, p_n , wobei $p_1 = 3$ ist. Wir konstruieren nun die Zahl $s = 3 + 4 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n$. Keine der Primzahlen die kongruent 3 modulo 4 sind, teilen diese Zahl, also ist s das Produkt von Zahlen, die alle kongruent 1 modulo 4 sind, also ihr Produkt auch kongruent 1 modulo vier ist. Dies führt zu dem gewünschten Widerspruch, denn s ist kongruent 3 modulo 4 und somit existieren unendlich viele Zahlen mit der gewünschten Bedingung.

5. Gilt $9 \mid a^2 + ab + b^2$, dann sind a und b durch 3 teilbar.

Lösung: Durch Umformen erhalten wir $9 \mid a^2 + ab + b^2 = 9 \mid a^2 - 2ab + b^2 + 3ab = 9 \mid (a - b)^2 + 3ab$. Also muss auch $3 \mid (a - b)^2 + 3ab \iff 3 \mid (a - b)^2$. Da 3 prim ist, gilt $3 \mid (a - b)^2 \implies 3 \mid (a - b)$, also $9 \mid (a - b)^2$. Somit wissen wir, dass $9 \mid 3ab$, also können wir oBdA sagen, dass $3 \mid a$. Da auch $3 \mid a - b \implies 3 \mid b$.

6. Für welche ganzen Zahlen n ist $n^2 + 3n + 5$

(a) durch 11 teilbar?

(b) durch 121 teilbar?

Lösung:

(a) Wir formen $n^2 + 3n + 5$ zu $n^2 - 8n + 16 + 11n - 11$ um und erhalten somit $11 \mid (n - 4)^2$, somit stimmt die Gleichung genau bei $n \equiv 4$ modulo 11. Also ist $n = 11k + 4$.

(b) Wenn $n^2 + 3n + 5$ durch 121 teilbar sein soll, muss es auch durch 11 teilbar sein, also setzen wir $n = 11k + 4$. Dies ergibt

$$121|(11k + 4)^2 + 5(11k + 4) + 5 = 121k^2 + 121k + 33$$

$$\iff 121|33,$$

was nicht sein kann. Folglich gibt es keine Zahlen, die diese Bedingung erfüllen.

7. Seien $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{-1, 1\}$, sodass gilt

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_1 = 0.$$

Zeige, dass $4 \mid n$.

Lösung: Wenn alle $a_i = 1$ sind, ist die Summe gleich n . Damit die Summe gleich 0 ist, brauchen wir gleich viele Produkte $(a_i \cdot a_{i+1})$, die gleich -1 sind, wie solche, die $+1$ ergeben, also $2 \mid n$. Vom Anfangszustand mit allen $a_i = 1$ kommen wir zu jedem Zustand, wenn wir diejenigen a_k von 1 zu -1 wechseln, welche am Schluss -1 sein sollten. Bei jedem Wechsel bleibt die Anzahl der Produkte, die 1 ergeben gerade, denn, falls $a_{k-1} = a_{k+1}$ ist, wird deren Anzahl um 2 erhöht oder erniedrigt und falls $a_{k-1} \neq a_{k+1}$ ist, bleibt sie gleich. Nun wissen wir, dass die Anzahl Produkte mit der Summe 1 am Schluss gleich $2k$ ist, und dass diejenige mit Summe -1 ebenfalls gleich $2k$ ist und somit $n = 4k$.

8. (IMO 87) Zeige, dass es keine Funktion $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ gibt mit

$$f(f(n)) = n + 1987.$$

Lösung: Wir setzen $f(n)$ für n ein und erhalten $f(f(f(n))) = f(n) + 1987$. Da aber $f(f(n)) = n + 1987$ ist, ergibt dies $f(n + 1987) = f(n) + 1987$ also sehen wir, dass $a \equiv b \pmod{1987} \implies f(a) \equiv f(b) \pmod{1987}$. Ausserdem sind alle $f(n)$ definiert, sobald wir die Werte von $f(1), f(2), \dots, f(1987)$ kennen. Da alle Restgruppen modulo 1987 vorkommen und $f(f(n)) \equiv n \pmod{1987}$ und $f(f(f(n))) \equiv f(n) \pmod{1987}$ können wir die Werte $1, 2, \dots, 1987$ in Zweiergruppen (a, b) aufteilen, wobei $f(a) \equiv b$ und $f(b) \equiv a$ modulo 1987. Da 1987 eine ungerade Zahl ist, muss es eine Zahl c geben, sodass $f(c) \equiv c \pmod{1987}$ ist, also ist $f(c) = c + k \cdot 1987$, also $f(f(c)) = f(c + k \cdot 1987) = k \cdot 1987 + f(c) = 2k \cdot 1987 + c = 1987 + c \implies 2k = 1$. Was ein Widerspruch ist. Somit kann eine solche Funktion nicht existieren.

9. (Russland 97) Finde alle Paare von Primzahlen p, q mit $p^3 - q^5 = (p + q)^2$.

Lösung: Primzahlen modulo 6 sind immer kongruent 1 oder 5, falls sie nicht 2 oder 3 sind. Wenn wir 2 und 3 ausschliessen, erhalten wir die Fälle $(p, q) \equiv (1, 1), (1, 5), (5, 1), (5, 5)$. Und wenn wir die Gleichung modulo 6 anschauen, ergibt dies die Gleichungen

$$1 - 1 \equiv 4$$

$$1 - 5 \equiv 0$$

$$5 - 1 \equiv 0$$

$$5 - 5 \equiv 4,$$

welche allesamt nicht stimmen. Also wissen wir, dass 2 oder 3 vorkommen muss. Ausrechnen ergibt die einzige Lösung $(p, q) = (7, 3)$.

10. (CH 03) Gegeben sind ganze Zahlen $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{101} < 5050$, zeige, dass man daraus immer vier verschiedene a_k, a_l, a_m, a_n auswählen kann mit

$$5050 | (a_k + a_l - a_m - a_n).$$

Lösung: Wir schauen den Wert $a_i - a_{i-k}$ für alle $i = 1, 2, \dots, 101$ und $i-k > 0$ an. Wir können leicht zählen, dass es $\frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$ Arten gibt, i und k zu wählen. Nun sind entweder alle verschiedenen Restklassen modulo 5050 vertreten oder eine mindestens zweimal. Nehmen wir an, Ersteres sei der Fall. Wenn wir nun alle $a_i - a_{i-k}$ zusammenzählen, ergibt dies $s = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \dots + b_{101} a_{101}$. Wobei b_i die Anzahl mal ist, die a_i mehr dazugezählt als abgezählt wurde. Da a_i insgesamt 100-mal vorkommt, ist b_i gerade und somit auch s gerade. Nun ist aber auch $s = \frac{5050 \cdot 5051}{2} = 2525 \cdot 5051$, also ungerade, was ein Widerspruch ist. Wir wissen also, dass es zwie Paare $a_i - a_{i-k}$ und $a_j - a_{j-l}$ gibt, sodass $a_i - a_{i-k} \equiv a_j - a_{j-l} \pmod{5050}$. Diese Zahlen müssen alle verschieden sein, denn $a_j = a_i \iff a_j l k = a_i - k$, da alle Zahlen kleiner als 5050 sind. Somit wissen wir, dass $5050 | a_i + a_{j-l} - a_{i-k} - a_j$.

Die φ -Funktion und der Satz von Euler Fermat

1. (IMO 64)

- a) Finde alle natürlichen Zahlen n , sodass $2^n - 1$ durch 7 teilbar ist.
 b) Zeige, dass $2^n + 1$ nie durch 7 teilbar ist.

Lösung:

- (a) $7 | 2^n \implies n \equiv 1 \pmod{7}$. Die ersten Werte sind $2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4$ und $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ also sehen wir, dass für $n \equiv 0 \pmod{3}$ die Gleichung stimmt.
 (b) Wir haben gesehen, dass 2^n nie kongruent -1 modulo 7 ist, daher kann die Gleichung nicht stimmen.

2. Zeige: $13 | 2^{70} + 3^{70}$.

Lösung: Wir sehen, dass $\varphi(13) = 12$ ist also, dass $2^{70} + 3^{70} \equiv 2^{10} + 3^{10} \pmod{13}$. 2^{10} und 3^{10} modulo 13 sind mit relativ kleinem Rechenaufwand ausrechenbar und man erhält, dass $2^{10} \equiv -3$ und $3^{10} \equiv 3 \pmod{13}$ ist, woraus folgt, dass die Behauptung stimmt.

3. Finde alle natürlichen Zahlen n , sodass $3 | n \cdot 2^n - 1$.

Lösung: Wenn wir 2^n modulo 3 anschauen, sehen wir, dass für alle geraden n , $2^n \equiv 1 \pmod{3}$ ist und für alle ungeraden n , $2^n \equiv 2 \pmod{3}$. Es ist also periodisch mit Periode 2. n selbst ist periodisch mit Periode 3 modulo 3, also ist $2^n \cdot n$ periodisch mit Periode 6. Für die ersten $n = 1, \dots, 6$, sehen wir:

| | | | | | | |
|---------------|---|---|---|---|---|---|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2^n | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| $n \cdot 2^n$ | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Also ist $2^n \cdot -1 \equiv 0 \pmod{3}$, wenn $n \equiv 4, 5 \pmod{6}$, also stimmt es für alle natürlichen Zahlen n mit $n = 4 + 6k$ oder $n = 5 + 6k$.

4. (IMO 78) Seien m und n natürliche Zahlen mit $m < n$. Die drei letzten Dezimalziffern von 1978^m und 1978^n sind dieselben. Finde m und n , sodass $m + n$ möglichst klein ist.

Lösung: Damit die letzten drei Ziffern dieselben sind, müssen $1978^m \equiv 1978^n \pmod{1000}$ sein, also $1978^m \equiv 1978^n \pmod{8}$ und $1978^m \equiv 1978^n \pmod{125}$. Nun ist $1978 \equiv 2 \pmod{8}$, also ist, $1978^m \equiv 0 \pmod{8}$, sobald, $m \geq 3$. $1978^{100} \equiv 1 \pmod{125}$, und vorher gibt es keine Zahl auf die dies zutrifft. Dies ist so, denn $\varphi(5) = 4$ und $1987^4 \equiv 6 \pmod{125}$ und $1978^2 \not\equiv 1 \pmod{5}$. Damit $1978^x \equiv 1 \pmod{125}$, muss $x \mid \varphi(125) = 100$. Jedoch ist $6^5 \not\equiv 1 \pmod{125} \implies x = 100$. Da m mindestens 3 ist, damit man modulo 8 keine Probleme bekommt und der Unterschied zwischen m und n ein Vielfaches von 100 ist, ist die kleinste Lösung $m = 3$, $n = 103$ mit $m + n = 106$.

5. Sei n eine ungerade natürliche Zahl. Zeige, dass n ein Teiler ist von $2^{n!} - 1$.

Lösung: Da n ungerade ist, gilt $ggT(n, 2) = 1$, also ist $2^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. Da $\varphi(n)$ immer kleiner als n ist $\implies \varphi(n) \mid n!$. Somit ist $2^{n!} \equiv (2^{\varphi(n)})^{\frac{n!}{\varphi(n)}} \equiv 1 \pmod{n}$ und die Behauptung stimmt.

6. Ist n gerade, dann gilt $323 \mid 20^n + 16^n - 3^n - 1$.

Lösung: $323 = 19 \cdot 17$, also müssen wir nur zeigen, dass $17 \mid 20^n + 16^n - 3^n - 1$ und $19 \mid 20^n + 16^n - 3^n - 1$. Schauen wir den Ausdruck modulo 19 an, sehen wir, dass $20 \equiv 1 \pmod{19}$, also, dass $20^n \equiv 1^n \pmod{19} \iff 20^n - 1 \equiv 0 \pmod{19}$. Auch sehen wir, dass $16 \equiv -3 \pmod{19}$. Für n gerade heisst das, dass $16^n \equiv (-3)^n \equiv 3^n \pmod{19} \iff 16^n - 3^n \equiv 0 \pmod{19} \implies 19 \mid 16^n - 3^n + 20^n - 1$. Nun müssen wir dies nur noch für 17 zeigen. Wiederum ist $20 \equiv 3 \pmod{17} \implies 20^2 \equiv 3^n \pmod{17} \iff 20^n - 3^n \equiv 0 \pmod{17}$. Wir sehen auch, dass $16 \equiv -1 \pmod{17} \implies 16^n \equiv (-1)^n \pmod{17}$, da n gerade $(-1)^n \equiv 1^n \implies 16^n \equiv 1^n \pmod{17} \iff 16^n - 1^n \equiv 0 \pmod{17}$. Also $17 \mid 20^n - 3^n + 16^n - 1^n$, womit die Aussage bewiesen ist.

7. Finde alle natürlichen Zahlen x, y, z, t und n , für die gilt

$$n^x + n^y + n^z = n^t.$$

Lösung: Sei oBdA $x \geq y \geq z$, dann ist

$$n^z(n^{x-z} + n^{y-z} + 1) = n^z \cdot n^{t-z} \iff n^{x-z} + n^{y-z} + 1 = n^{t-z}.$$

Falls $y - z \geq 1$, dann $n \mid n^{x-z} + n^{y-z} \implies n \nmid n^{x-z} + n^{y-z} + 1 \implies n \nmid n^{t-z} \implies t - z = 0$, also $n^{x-z} + n^{y-z} = 0$, was ein Widerspruch ist. Also ist $y = z$, was zu $n^{x-z} + 2 = n^{t-x}$ führt. Nun ist entweder $n = 2$, oder $x - z = 0$.

Wenn $n = 2 \implies 2^{x-z} + 2 = 2^{t-z} \implies 2x - z - 1 + 1 = 2^{t-z-1} \implies x - z - 1 = 0 \implies t - z - 1 = 1$, dies stimmt genau dann, wenn $(n, x, y, z, t) = (2, k + 1, k, k, k + 2)$, für alle k in \mathbb{N} . Wenn $x - z = 0$, dann ist $1 + 1 + 1 = n^{z-x} \implies n = 3$ und $z - x = 1$, also sind die Lösungen $(n, x, y, z, t) = (3, k, k, k, k + 1)$, $k \in \mathbb{N}$.

8. FERMAT hat behauptet, alle Zahlen der Form $F_n = 2^{2^n} + 1$ seien prim. Dies ist jedoch falsch, EULER hat als erster gezeigt, dass $641 \mid F_5$. Verifiziere dies.

Lösung: Wir rechnen $2^{2^5} = 2^{32}$ modulo 641 aus und erhalten so

$$\begin{aligned} 2^2 &\equiv 4 \\ 2^4 &\equiv 16 \\ 2^8 &\equiv 256 \\ 2^{16} &\equiv 65536 \equiv 154 \\ 2^{32} &\equiv 23716 \equiv -1 \end{aligned}$$

Nun sehen wir, dass die Behauptung offensichtlich stimmt.

9. Bestimme die zwei letzten Ziffern von $7^{7^{7^7}}$.

Lösung: Um die letzten beiden Ziffern herauszufinden, reicht es, die Zahl modulo 100 anzuschauen, also modulo 4 und modulo 25. 7^x ist $\equiv 3 \pmod{4}$, falls $x \equiv 1 \pmod{2}$, was der Fall ist. $\varphi(25) = 20$, also müssen wir $7^{7^{7^7}} \pmod{20}$ herausfinden $\varphi(20) = 8$, also müssen wir $7^{7^7} \pmod{8}$ herausfinden. Da $7 \equiv -1 \pmod{8}$, ist $7^{7^7} \equiv -1 \equiv 7 \pmod{8}$. $7^7 \equiv 3 \pmod{20}$ und $7^3 \equiv -7 \pmod{25}$, die einzige Zahl unter 100, die beide Kongruenzen erfüllt, ist 43, also sind die letzten beiden Ziffern 4 und 3.

Quadratische Reste und höhere Potenzen

1. Zeige, dass für jede Primzahl $p > 3$ gilt $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$

Lösung: Wir sehen, dass $24 = 8 \cdot 3$ faktorisiert ist. Wenn wir Quadrate modulo 8 ansehen, sehen wir schnell, dass $p^2 \equiv 1 \pmod{8}$ ist. Dasselbe gilt für $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Nun kann man dank dem Chinesischen Restsatz schliessen, dass $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$ ist.

2. Zeige: Sind p und $p^2 + 2$ Primzahlen, dann ist auch $p^3 + 2$ prim.

Lösung: Wenn man die Gleichung modulo 3 betrachtet, sieht man, dass falls $p \equiv 1, 2 \pmod{3} \implies p^2 + 2 \equiv 0 \pmod{3}$, also ist die einzige Möglichkeit, dass $p^2 + 2$ und p beide prim sind $p = 3$ mit $p^2 + 2 = 11$ und $p^3 + 2 = 29$. Da 29 prim ist, stimmt die Aussage.

3. Sei $q = p_1 p_2 \cdots p_n$ das Produkt der ersten n Primzahlen. Zeige, dass $q - 1$ keine Quadratzahl ist.

Lösung: Auch diese Gleichung schauen wir uns modulo 3 an. $q \equiv 0 \pmod{3}$ und somit ist $q - 1 \equiv 2 \pmod{3}$. Alle Quadrate sind aber $\equiv 1, 0 \pmod{3}$. Somit kann $q - 1$ keine Quadratzahl sein für $n \geq 2$.

4. (CH 98) Finde alle Primzahlen p , sodass $p^2 + 11$ genau 6 positive Teiler besitzt.

Lösung: Zuerst nehmen wir an, dass $p \neq 2, 3$. Somit ist $p^2 + 11 \equiv 0 \pmod{4}$ und auch $\equiv 0 \pmod{3}$. Somit hat $p^2 + 11$ sicher die Teiler 1, 2, 3, 4, 6, 12, p was für $p \neq 1$ schon zu viele Teiler sind. Da 1 keine Primzahl ist, ist $p = 1$ jedoch auch keine Lösung. Für $p = 2$ erhalten wir $p^2 + 11 = 15$ mit den Teilern 1, 3, 5, 15, was also auch keine Lösung ist, und $p = 3$ liefert die einzige Lösung $p^2 + 11 = 20$ mit den Teilern 1, 2, 4, 5, 10 und 20.

5. Ist $n \in \mathbb{N}$, sodass $2n + 1$ und $3n + 1$ beides Quadrate sind, dann gilt $40 \mid n$.

Lösung: Wir betrachten die Gleichung zuerst modulo 8 und sehen, dass $2n + 1 \equiv 1 \pmod{8}$ sein muss, da dies die einzige ungerade Quadratzahl modulo 8 ist. Somit ist $n \equiv 0, 4 \pmod{8} \implies 3n + 1 \equiv 1, 5 \pmod{8}$, wir sehen also, dass nur $n \equiv 0 \pmod{8}$ in Frage kommt. Wenn wir die Quadrate modulo 5 betrachten, erhalten wir $x^2 \equiv 0, 1, -1$. $2n + 1 \equiv 0 \implies n \equiv 2 \pmod{5}$, $2n + 1 \equiv 1 \implies n \equiv 0 \pmod{5}$ und $2n + 1 \equiv -1 \implies n \equiv -1 \pmod{5}$. Dies führt zu $3n + 1 \equiv 2, 1, 3$, wobei nur das Mittlere ein gültiges Resultat ist. Somit ist $n \equiv 0 \pmod{5}$ und also $40 \mid n$.

6. (MMO 1984) Finde alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $19x^3 - 84y^2 = 1984$.

Lösung: Wir schauen die Gleichung modulo 19 an, und erhalten $y^2 \equiv -1$. Wenn wir Zahlen durchgehen, sehen wir, dass dies nie stimmt, und es somit kein y , und also auch kein x gibt, welche die Gleichung erfüllen.

7. Für $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$ gilt $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$. Zeige, dass mindestens drei der fünf Zahlen gerade sind, dass mindestens drei durch 5 teilbar sind und dass mindestens zwei mit der Ziffer 0 enden.

Lösung: Für alle x gilt $x^4 \equiv 0, 1 \pmod{8}$. Somit sind die einzigen Lösungen $0 + 0 + 0 + 1 \equiv 1, 0 + 0 + 0 + 0 \equiv 0 \pmod{8}$. Wir sehen, dass auf der linken Seite der Gleichung mindestens 3 Zahlen gerade sind. Betrachten wir die Gleichung modulo 5, passiert etwas ähnliches, denn $x^4 \equiv 1, 0 \pmod{5}$, da $\varphi(5) = 4$ ist. Folglich sind auch modulo 5 die einzigen Lösungen $0 + 0 + 0 + 0 \equiv 0$ und $0 + 0 + 0 + 1 \equiv 1$. Auch hier sind also auf der linken Seite mindestens 3 Zahlen durch 5 teilbar. Da je 3 aus 4 Zahlen durch 2 resp. 5 teilbar sind, gibt es mindestens 2, die durch 2 und 5 teilbar sind, also mit einer 0 enden.

8. (CH 02) n sei eine positive ganze Zahl mit mindestens vier verschiedenen positiven Teilern. Die vier kleinsten unter diesen Teilern seien d_1, d_2, d_3, d_4 . Finde alle solchen Zahlen n , für die gilt

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n.$$

Lösung: Wir wissen, dass $d_1 = 1$ ist. Um d_2 herauszufinden, nehmen wir an, n sei ungerade was dazu führt, dass auch alle Teiler ungerade sind, und somit $1 + 1 + 1 + 1 \equiv 1 \pmod{2}$, was ein Widerspruch ist. Somit gilt $2 | n$ und also $d_2 = 2$. Desweiteren sehen wir, dass $4 \nmid n$, da sonst $1 + 0 + 0 + 1 \equiv 0 \pmod{4}$ oder $1 + 0 + 0 + 0 \equiv 0 \pmod{4}$ wäre. Somit wissen wir, dass entweder d_3 und d_4 zwei weitere Primteiler p, q sind, oder dass d_3 ein weiterer Primteiler ist und $d_4 = 2d_3$ ist. Im ersten Fall ergibt die linke Seite $1 + 0 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod{4}$ was im Widerspruch zu $2 | n$ steht also ist unsere Gleichung $n = 2d_3k = 1 + 4 + d_3^2 + 4d_3^2$, insbesondere $d_3 | 5$, also $d_3 = 5$ und somit ist $n = 130$ die einzige Lösung.

9. (IMO 86) Sei d eine positive ganze Zahl $\neq 2, 5, 13$. Zeige: In der Menge $\{2, 5, 13, d\}$ gibt es zwei Elemente a, b , für die $ab - 1$ keine Quadratzahl ist.

Lösung: Für jedes x gilt $x^2 \equiv 0, 1, 4, 9 \pmod{16}$ also ist $2d - 1 \equiv 1, 9 \pmod{16}$ und somit $d \equiv 1, 5 \pmod{16}$. Dies führt zu $5d - 1 \equiv 4, 8 \pmod{16}$, also $d \not\equiv 5 \pmod{16}$. Für $d = 1$ ist $13d - 1 \equiv 12 \pmod{16}$, was auch $d \equiv 1 \pmod{16}$ ausschliesst. Somit gibt es keine Lösung.

10. (IMO 96) a, b sind natürliche Zahlen, sodass $15a + 16b$ und $16a - 15b$ beides Quadrate sind. Man bestimme den kleinsten möglichen Wert, den das kleinere der beiden Quadrate annehmen kann.

Lösung: Wir setzen $15a + 16b = x^2$ und $16a - 15b = y^2$. Wenn wir nun b wegschaffen erhalten wir $(15^2 + 16^2)a = 15x^2 + 16y^2$, also

$$a = \frac{15x^2 + 16y^2}{15^2 + 16^2} = \frac{15x^2 + 16y^2}{37 \cdot 13}$$

also existiert immer ein a , wenn $15x^2 + 16y^2 \equiv 0 \pmod{37 \cdot 13}$ ist. Wenn man dasselbe für b macht, erhält man

$$b = \frac{16x^2 - 15y^2}{31}$$

also muss $16x^2 - 15y^2 \equiv 0 \pmod{31}$ sein. Der Chinesische Restsatz besagt, dass es solche Zahlen x und y gibt, nun muss man nur noch herausfinden welche, indem man alle Möglichkeiten modulo $31 \cdot 37 \cdot 13$ berechnet.

11. Zeige, dass 19^{19} nicht die Summe einer dritten und einer vierten Potenz ist.

Lösung: Schaut man in die Gleichung $19^{19} = x^4 + y^3$ modulo 13 erhält man:

| | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|---|----|----|----|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| n^2 | 0 | 1 | 4 | 9 | 3 | -1 | 10 | 10 | -1 | 3 | 9 | 4 | 1 |
| n^3 | 0 | 1 | 8 | 1 | -1 | 8 | 8 | 5 | 5 | 1 | -1 | 5 | -1 |
| n^4 | 0 | 1 | 3 | 3 | 9 | 1 | 9 | 9 | 1 | 9 | 3 | 3 | 1 |

Insbesondere sagt dies, dass $x^4 \equiv 0, 1, 5, 8, -1 \pmod{13}$ und $y^3 \equiv 0, 1, 3, 9 \pmod{13}$. Da $19^{19} \equiv 6^7 \equiv 7 \pmod{13}$ ist, müssen wir nur noch überprüfen ob dies erreicht werden kann. Offensichtlicherweise wird dies nicht erreicht. Somit kann 19^{19} nicht die Summe einer dritten und vierten Potenz sein.

Faktorisierungen

1. Zeige, dass für alle ganzen Zahlen n gilt $30 \mid n^5 - n$.

Lösung: Wir sehen, dass $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ist, und daher muss $n^5 - n$ kongruent 0 für die einzelnen Primzahlen sein. Dank dem kleinen Satz von Fermat, dass $n^5 \equiv n \pmod{5}$ ist, also $n^5 - n \equiv 0 \pmod{5}$. Modulo n betrachtet, gilt $n^2 \equiv n$, also $n^5 \equiv n \iff n^5 - n \equiv 0 \pmod{2}$. Modulo 3 gilt: $n^3 \equiv n \implies n^5 \equiv n^3 \equiv n \pmod{3}$ also auch hier $n^5 - n \equiv 0 \pmod{3}$.

2. Ist n keine Primzahl, dann ist auch $2^n - 1$ nicht prim. Besitzt n einen ungeraden Faktor > 1 , dann ist $2^n + 1$ nicht prim.

Lösung: Wenn n nicht prim ist, kann man es schreiben als $n = ab$, wobei weder $a, b \neq 1$ sind und dann kann man $2^n - 1 = (2^a)^b - 1^b = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \dots + 2^a + 1)$ schreiben. Ist $n = pk$ und p eine ungerade Zahl und $p, k \neq 1$, dann ist $2^n + 1 = (2^k)^p + 1 = (2^k - 1)(2^{k(p-1)} - 2^{k(p-2)} + \dots + 2^k - 1)$.

3. (IMO 68) Zeige, dass es unendlich viele natürlichen Zahlen m gibt, sodass $n^4 + m$ für keine natürliche Zahl n prim ist.

Lösung: Wählen wir $m = 4x^4$ können wir $n^4 + m$ gemäss der Identität von Sophie Germain in $n^4 + 4x^4 = (n^2 + 2n^2x^2 + 2x^2)(n^2 - 2n^2x^2 + 2x^2)$ faktorisieren und es ist somit nicht prim. Da es für alle natürlichen Zahlen x funktioniert, gibt es unendlich viele m , welche die Bedingung erfüllen.

4. Zeige, dass für $n > 2$ die Zahl $2^{2^n-2} + 1$ nie prim ist.

Lösung: Der Ausdruck $2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1)$ hat für alle $n > 2$ einen ungeraden Faktor. Somit können wir ihn folgendermassen faktorisieren:

$$2^{2^n-2} + 1 = 4^{2^{n-1}-1} + 1 = (4 + 1)(4^{2^{n-1}-2} - 4^{2^{n-1}-3} \pm \dots - 4 + 1).$$

5. Gibt es Primzahlen p, q, r mit $p^2 + q^3 = r^4$?

Lösung: Wir formen die Gleichung zu $q^3 = (r^2 - p)(r^2 + p)$ da q prim ist, folgt daraus, dass $q^2 = r^2 + p$ und $q = r^2 - p$ oder $r^2 - p = 1$. Im ersten Fall wäre $q^2 + q = 2r^2$, also $q \mid 2r^2 \implies q = r$ oder $q = 2$. Mit $q = r$ wäre $p = 0$, wegen $q^2 = r^2 + p$ und mit $q = 2$ wäre $r^2 = 3$. Also gibt es im ersten Fall keine Lösung. Im zweiten Fall haben wir $r^2 - p = 1 \iff r^2 - 1 = p \iff (r-1)(r+1) = p$, also $r-1 = 1 \implies r = 2 \implies p = 3$, also $q^3 = 16 - 9 = 7$, was ein Widerspruch ist. Somit gibt es keine Lösungen zu dieser Gleichung.

6. (Österreich 95) Wieviele a) gerade b) ungerade natürliche Zahlen n gibt es, sodass n ein Teiler ist von $3^{12} - 1$, nicht aber von $3^k - 1$ für $k = 1, 2, \dots, 11$?

Lösung: Faktorisiert man $3^{12} - 1$ erhält man

$$\begin{aligned} (3^6 - 1)(3^6 + 1) &= (3 - 1)(3^2 + 3 + 1)(3 + 1)(3^2 - 3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 - 3^2 + 1) \\ &= 2 \cdot 13 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 73. \end{aligned}$$

Betrachtet man diese Zahlen näher modulo 3, sieht man, dass keine der Zahlen $3 - 1, 3^2 - 1, \dots, 3^{11} - 1$ durch 73 teilbar sind. Desweiteren gilt, dass 3-erPotenzen, genau dann $\equiv 1 \pmod{2^4}$ doer $\equiv 1 \pmod{3}$ sind, wenn der Exponent durch vier teilbar ist. Bei 7 resp. 13 gilt dasselbe, nur muss der Exponent durch 6 resp. 3 teilbar sein. Somit gibt es kein $3^x - 1$, sodass es durch 2^4 resp. 5 und 13 resp. 7 teilbar ist. Wenn man nun die Teil von $3^{12} - 1$ zählt, die die obige Bedingung erfüllen, sehen wir, dass es 59 gerade und 14 ungerade Teiler gibt, die die Bedingung erfüllen.

7. Finde alle positiven ganzen Lösungen der Gleichung

$$|3^x - 2^y| = 1.$$

Lösung: Zuerst schauen wir den Fall $3^x - 2^y = 1$ an. Ist $y = 1$ ergibt dies die Lösung $(x, y) = (1, 1)$. Nun können wir annehmen, dass $y > 1$ und somit $4 | 3^x - 1 \implies x \equiv 0 \pmod{2}$. Also schreiben wir $x = 2k$ und erhalten so $3^{2k} - 1 = 2^y = (3^k - 1)(3^k + 1)$. Da $3^k - 1 \not\equiv 3^k + 1 \pmod{4}$ ist, kann nur eine der beiden Zahlen durch 4 teilbar sein. Da sie keine anderen Primfaktoren haben dürfen als 2, ergibt sich somit $3^k - 1 = 2 \iff k = 1$, was uns $(x, y) = (2, 3)$ als Lösung liefert.

Im zweiten Fall ist $3^x - 2^y = -1 \iff 3^x = 2^y - 1$. Dies ergibt $2^y \equiv 1 \pmod{3} \implies y \equiv 0 \pmod{2}$, also können wir hier $y = 2m$ schreiben. Dies können wir folgendermassen faktorisieren: $2^{2m} - 1 = (2^m + 1)(2^m - 1) = 3^x$. Nun kann aber nur einer der Faktoren kongruent 0 modulo 3 sein, und somit ist $2^m - 1 = 1 \iff m = 1$. Also ist $(x, y) = (1, 2)$ eine weitere Lösung und alle Lösungen gefunden.

8. Mehrere verschiedene ganze Zahlen liegen zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen. Zeige, dass ihre paarweisen Produkte alle verschieden sind.

Lösung: Seien a, b zwei Zahlen, sodass $ab = x^2$ und $a, b > n^2$ und $a, b < (n + 1)^2$. Wir können somit $a = m^2 y$ und $b = (m + c)^2 y$ ausdrücken. Insbesondere können wir $c = 1$ wählen, denn wenn $c > 1$ ist, liegt $(m + 1)^2$ zwischen m^2 und $(m + c)^2$ und somit auch zwischen n^2 und $(n + 1)^2$. Wir wissen, dass $n^2 < m^2 y \iff n < m\sqrt{y}$ also ist $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 < m^2 y + 2m\sqrt{y} + 1 \leq m^2 y + 2my + y = (m + 1)^2 y = b$. Dies widerspricht der Annahme, dass a und b zwischen n^2 und $(n + 1)^2$ liegen, folglich existieren keine solchen Zahlen.

9. Finde alle natürlichen Zahlen x, y, z , sodass gilt

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 189.$$

Lösung: Der Ausdruck lässt sich faktorisieren zu

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 &= (x^2 + y^2 - z^2) - 4x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2 - z^2 + 2xy)(x^2 + y^2 - z^2 - 2xy) \\ &= ((x + y)^2 - z^2) ((x - y)^2 - z^2) \\ &= (x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z). \end{aligned}$$

Wir können oBdA annehmen, dass $x \geq y \geq z$ ist. Somit sind alle Terme positiv, denn nur der letzte Term $(x - y - z)$ könnte negativ sein. Da das Ergebnis aber 189, also positiv ist, kann dies nicht sein. Wir sehen somit, dass $x + y + z > x + y - z \geq x - y + z > x - y - z \geq 1$ ist und $189 = 3^3 \cdot 7$. Schnell sieht man, dass $x - y - z > 1$ keine Lösung hat daher bleiben noch die Lösungen $x - y + z = x - z + y = 3, x + y + z = 7 \cdot 3$ und $x - y + z = 3, x + y - z = 7, x + y + z = 9$. Ausrechnen ergibt, dass das erst keine Lösung hat jedoch dass das zweite stimmt. Somit sind die einzigen Lösungen $(x, y, z) = (5, 3, 1)$ und alle Permutationen davon.

10. Ist $4^{545} + 545^4$ eine Primzahl?

Lösung: Wir können $4^{545} + 545^4 = 4 \cdot (4^{136})^4 + 545^4$ mit der Identität von Sophie Germain faktorisieren. Keiner der Faktoren ist 1, daraus folgt, dass die Zahl nicht prim ist.

11. Zeige, dass die Gleichung $y^2 = x^3 + 7$ keine ganzzahligen Lösungen besitzt.

Lösung: Wir formen die Gleichung um und erhalten somit $y^2 + 1 = x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$. Falls x nun gerade wäre, wäre $y^2 \equiv 7 \pmod{8}$, was ein Widerspruch ist. Nun nehmen wir an, dass $x \equiv 1 \pmod{2}$, also ist $x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 \equiv 3 \pmod{4}$. Also ist dieser Term $4k+3$. Nun wollen wir zeigen, dass $y^2 + 1$ keine Primteiler, und somit keine Teiler der Form $4k+3$ hat. (Ein Teiler der Form $4k+3$ hat eine ungerade Anzahl Primteiler, die ebenfalls die Form $4k+3$ haben, dies ergibt sich, wenn man den Ausdruck modulo 4 anschaut). Nun sei $p = 4k+3$ und $p | y^2 + 1 \implies y^2 \equiv -1 \pmod{p} \implies y^4 \equiv 1 \pmod{p} \implies 4 | \varphi p = p-1 \implies p \equiv 1 \pmod{4}$. Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme, also gibt es keine Lösungen.

12. (CH 03) Finde die grösste natürliche Zahl n , die für jede ganze Zahl a ein Teiler ist von $a^{25} - a$.

Lösung: Wir können $a^{25} - a$ als

$$a(a-1)(a^2+a+1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+1)(a^4-a^2+1)(a^4+1)(a^8-a^4+1)$$

schreiben. Im Fall von $a = 2$ ergibt dies $s = 2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 241$ und $n | s$. Da $3^{24} \equiv 141 \pmod{241} \implies 241 \nmid n$. Desweiteren ist $3^{24} \equiv -1 \pmod{17}$ also auch $17 \nmid n$. 2, 3, 5, 7 und 13 teilen alle n , da $\varphi(2), \varphi(3)$ etc. alle 24 teilen. Nun ist die einzige Frage, ob $9 | n$, dann müsste $9 | 3^{25} - 3 \implies 9 | 3$ was ein Widerspruch ist. Somit ist $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$.

13. Sei $n \geq 1$. Zeige, dass $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ mindestens n verschiedene Primteiler besitzt.

Lösung: Für $n = 1$ stimmt die Aussage offensichtlich, denn $2^2 + 2 + 1 = 7$ wir wollen nun per Induktion zeigen, dass es für alle n stimmt und nehmen deshalb an, es stimme für alle Zahlen kleiner gleich n . Wir können $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1 = (2^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-1}} - 2^{2^{n-2}} + 1)$ faktorisieren. Zudem ist $\text{ggT}(2^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-2}} + 1, 2^{2^{n-1}} - 2^{2^{n-2}} + 1) = \text{ggT}(2 \cdot 2^{2^{n-2}}, 2^{2^{n-1}} - 2^{2^{n-2}} + 1) = 1$ somit enthält das Produkt mindesten einen Primfaktor mehr, also mindestens n Primfaktoren, was die Induktion abschliesst.

14. Finde alle positiven ganzen Lösungen der Gleichung

$$3^x + 4^y = 5^z.$$

Lösung: Wenn man die Gleichung modulo 4 betrachtet, sieht man, dass $3^x \equiv 1 \pmod{4}$ sein muss, also $2 | x$, also $x = 2a$. Wenn man sie modulo 3 anschaut, sieht man, dass $5^z \equiv 1 \pmod{3}$, also $2 | z$, also $z = 2b$. Umformen der Gleichung ergibt $4^y = 5^{2b} - 3^{2a} = (5^b + 3^a)(5^b - 3^a)$. Also sind $5^b + 3^a$ und $5^b - 3^a$ beides Zweierpotenzen, die $2 \cdot 3^a$ auseinander sind. $2 \cdot 3^a \equiv 2 \pmod{4}$, also muss $5^b - 3^a = 2$ und $5^b + 3^a \equiv 2 + 2 \cdot 3^a \pmod{16}$. $2 \cdot 3^a \equiv 6, 2 \pmod{16}$, also $5^b + 3^a \not\equiv 0 \pmod{16}$. Somit ist $5^b + 3^a = 8, 4, 2$, was die Lösung $b = 1, a = 1$ ergibt. Somit ist die einzige Lösung $(x, y, z) = (2, 2, 2)$.

15. Zeige, dass die Zahl $(5^{125} - 1)/(5^{25} - 1)$ zusammengesetzt ist.

Lösung: Wir setzen $x = 5^{25}$ und müssen nun zeigen, dass

$$\frac{x^5 - 1}{x - 1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

faktorisierbar ist. Durch ausprobieren kann man finden, dass

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2 - 5x(x + 1)^2$$

ist. Wir sehen, dass dies für $x = 5^{25}$ die Differenz zweier Quadratzahlen ist. Somit ist die Zahl faktorisierbar.

16. Beweise, dass die Zahl 1280000401 zusammengesetzt ist.

Lösung: Die Zahl 1280000401 ist gleich $20^7 + 20^2 + 1$. Für jedes x kann

$$x^7 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)$$

faktoriert werden. Somit wissen wir, dass $421 \mid 1280000401$.

17. Ist $4^n + 2^n + 1$ eine Primzahl, dann ist n einer Dreierpotenz.

Lösung: Wir nehmen an, $n = x \cdot 3^k$ mit $3 \nmid x$. Wir wollen per Induktion zeigen, dass $4^{3^k} + 2^{3^k} + 1 \mid 4^{x \cdot 3^k} + 2^{x \cdot 3^k} + 1$. Für $x = 1$ ist die Aussage trivial und für $x = 2$ gilt

$$4^{2 \cdot 3^k} + 2^{2 \cdot 3^k} + 1 = (4^{3^k} + 2^{3^k} + 1)(2^{6 \cdot 3^k} - 2^{5 \cdot 3^k} + 2^{3 \cdot 3^k} - 2^{3^k} + 1).$$

Nun nehmen wir an, es gelte für x . Dann ist

$$\begin{aligned} 4^{(x+3) \cdot 3^k} + 2^{(x+3) \cdot 3^k} + 1 &= 4^{x \cdot 3^k} + 2^{x \cdot 3^k} + 1 + 4^{x+3^k} (4^{3 \cdot 3^k} - 1) + 2^{x \cdot 3^k} (2^{3 \cdot 2^k} - 1) \\ &= 4^{x \cdot 3^k} + 2^{x \cdot 3^k} + 1 + 4^{x+3^k} (2^{3 \cdot 3^k} - 1) (2^{3 \cdot 3^k} + 1) + 2^{x \cdot 3^k} (2^{3 \cdot 2^k} - 1). \end{aligned}$$

Da $2^{3 \cdot 2^k} - 1 = (2^{3^k} - 1)(4^{3^k} + 2^{3^k} + 1)$, stimmt die Behauptung. Nun sehen wir, dass alle Zahlen, die keine Dreierpotenz sind, nicht prim sind. Daher muss für alle Primzahl jener Form n eine Dreierpotenz sein.

18. (CSO 95) Sei p eine ungerade Primzahl. Finde alle Paare x, y nichtnegativer ganzer Zahlen, sodass gilt

$$p^x - y^p = 1.$$

Lösung: Umformen ergibt $p^x = y^p + 1 = (y+1)(y^{p-1} - y^{p-2} \pm \dots - y + 1)$, also $y+1 = p^z \iff y = p^z - 1$. Wenn man dies in die ursprüngliche Gleichung einsetzt, ergibt dies $p^x - (p^z - 1)^p = 1 \iff p^x - 1 = (p^z - 1)^p = p^{z \cdot p} - p \cdot p^{z(p-1)} \pm \dots + p \cdot p^z - 1$. Da p eine Primzahl ist, sind alle Binominalkoeffizienten durch p , nicht aber durch p^2 teilbar. Wenn man auf beiden Seiten der Gleichung $+1$ rechnet, sind alle Terme der rechten Seite ausser p^{z+1} durch p^{2z+1} teilbar, also ist $x \geq z+1$. Falls $x > z+1$ und $z \neq 0$, dann ist die linke Seite durch $z+2$ teilbar, die rechte jedoch nur durch $z+1$, was ein Widerspruch ist. Folglich ist entweder $x = z+1$ oder $z = 0$. $x = z+1$ kann mit demselben Argument wie vorhin ausgeschlossen werden, nur teilt man die Gleichung zuerst durch p^{z+1} und zieht dann 1 ab. Nun bleibt nur noch der Fall $z = 0$, wenn man dies in die Gleichung einsetzt ergibt es $p^x = 1$, also $x = 1$. Die eizige Lösung ist somit $(x, y) = (0, 0)$.

0 Ziffern und Zahlssysteme

Zahlen und ihre Ziffern

1. Die vierstellige Zahl $aabb$ ist ein Quadrat. Wie lautet sie?

Lösung: Schaut man den Ausdruck modulo 10 an, sieht man, dass $b \equiv 0, 1, 4, 5, 6, 9 \pmod{10}$ ist, da alle anderen Zahlen keine Quadrate modulo 10 sind. Anderst geschrieben, ist der Ausdruck $aabb = 1100a + 11b$. Also $11(100a + b)$. Da dies ein Quadrat ist, gilt $11 \mid 100a + b \iff a + b \equiv 0 \pmod{11}$. Nun haben wir für jedes möglich b ein a : $(a, b) = (0, 0), (1, 10), (4, 7), (5, 6), (6, 5), (9, 2)$, wobei die ersten beiden Möglichkeiten ausgeschlossen werden können. Nun teilen wir alle der Zahlen 4477, 5566, etc. durch 121 und schauen, ob ein Quadrat herauskommt, was nur bei $7744 = 11^2 \cdot 8^2$ der Fall ist. Somit ist $(a, b) = (7, 4)$ die einzige Lösung.

2. Ist eine Zahl der Form $\underbrace{111 \dots 11}_n$ prim, dann ist n prim.

Lösung: Wir nehmen zuerst an, n sei nicht prim und $ab = n$, mit $a, b \neq 1$. Dann ist

$$\underbrace{111 \dots 11}_n = \underbrace{1 \dots 1}_a \underbrace{1 \dots 1}_a \dots \underbrace{1 \dots 1}_a = \underbrace{1 \dots 1}_a \cdot \underbrace{0 \dots 01}_{a-1} \underbrace{0 \dots 01}_{a-1} \dots \underbrace{0 \dots 01}_{a-1}$$

und somit nicht prim. Daher muss n prim sein, damit $\underbrace{111 \dots 11}_n$ prim sein kann.

3. Zeige, dass in der Folge 1, 31, 331, 3331, ... unendlich viele zusammengesetzte Zahlen vorkommen.
 4. Zeige, dass $1982 \mid 222 \dots 22$ (1982 Zweien).
 5. (IMO 60) Finde alle dreistelligen, durch 11 teilbaren natürlichen Zahlen N , sodass $N/11$ gleich der Summe der Quadrate der Ziffern von N ist.
 6. Finde alle vierstelligen Zahlen $abcd$, sodass gilt $4 \cdot abcd = dcba$.
 7. (England 96) Das Paar

$$(M, N) = (3600, 2500)$$

hat viele Eigenschaften. Beide Zahlen sind vierstellig und es gibt genau zwei Stellen wo in M und N dieselbe Ziffer steht. An den beiden anderen Stellen ist die Ziffer in M um genau 1 grösser als jene in N . Ausserdem sind beides Quadrate. Finde alle Paare (M, N) vierstelliger Zahlen mit all diesen Eigenschaften.

8. Die Dezimaldarstellung von A besteht aus 600 Sechsen und einigen Nullen. Kann A eine Quadratzahl sein?
 9. Zeige

$$\underbrace{11 \dots 1}_{2n} = \underbrace{22 \dots 2}_n + (\underbrace{33 \dots 3}_n)^2.$$

10. Für eine natürliche Zahl n bezeichne \bar{n} die Zahl, die man erhält, wenn man die Reihenfolge der Ziffern von n umkehrt (z.B. $n = 1623$, $\bar{n} = 3261$). Für k gelte $k \mid n \implies k \mid \bar{n}$ für alle n . Zeige $k \mid 99$.
 11. (IMO 62) Bestimme die kleinste natürliche Zahl, die mit der Ziffer 6 endet, sodass die Zahl viermal so gross wird, wenn man die letzte Ziffer an den Anfang der Zahl verschiebt.
 12. (Südafrika 97) Finde alle natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft, dass wenn man die erste Ziffer ans Ende der Zahl verschiebt, dann ist das Resultat $3\frac{1}{2}$ mal so gross wie die ursprüngliche Zahl.
 13. (Shortlist 90) Finde alle natürlichen Zahlen n , sodass jede Zahl, die im Dezimalsystem geschrieben aus $n - 1$ Einsen und einer Sieben besteht, prim ist.

Darstellung einer Zahl in Basis b

1. Finde alle Funktionen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(1) = 1$ und

$$f(n) = \begin{cases} 1 + f(\frac{n-1}{2}), & n \text{ ungerade,} \\ 1 + f(\frac{n}{2}), & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Lösung: Wenn wir die Zahlen in Basis 2 anschauen, sehen wir schnell, dass der Funktionswert die Anzahl Stellen von n ist. Dies wollen wir per Induktion zeigen. Für $n = 1$ stimmt es, denn $f(1) = 1$, die einzige Zahl mit einer Stelle. Wir nehmen an, es stimme für alle Zahlen mit k Stellen. Nun sind für alle Zahlen mit $k + 1$ Stellen $2x$ oder $2x + 1$, wobei x eine beliebige Zahl mit k Stellen ist und $f(x) = k$. Nun ist $f(2x + 1) = 1 + f(x) = k + 1$ und auch $f(2x) = 1 + f(x) = k + 1$ somit ist der Beweis fertig. Also ist $f(n)$ die Anzahl Stellen von n mit Basis 2, anders ausgedrückt $n = \log_2(n)$ abgerundet.

2. (IMO 88) Für $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gelte $f(1) = 1, f(3) = 3$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$

- (a) $f(2n) = f(n)$,
- (b) $f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n)$,
- (c) $f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(n)$.

Finde die Anzahl $n \leq 1988$ mit $f(n) = n$.

3. (China 95) Nehme an, für $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gelte $f(1) = 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$

- (a) $3f(n)f(2n + 1) = f(2n)(1 + 3f(n))$,
- (b) $f(2n) < 6f(n)$.

Finde alle Lösungen der Gleichung $f(k) + f(m) = 293$.

4. (IMO 70) Es gelte $0 \leq x_i < b$ für $i = 0, 1, \dots, n$ und ausserdem $x_n, x_{n-1} > 0$. Sei $a > b$ und $x_n x_{n-1} \dots x_0$ sei in Basis a gelesen die Zahl A und in Basis b gelesen die Zahl B . Ähnlich sei $x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0$ in Basis a gelesen die Zahl A' und in Basis b gelesen die Zahl B' . Zeige, dass gilt $A'B < AB'$.
5. (USA 96) Entscheide, ob es eine Menge X ganzer Zahlen gibt, sodass die Gleichung $a + 2b = n$ für jede ganze Zahl n genau eine Lösung mit $a, b \in X$ hat.