Aufgaben Zahlentheorie I

Aktualisiert: 1. Dezember 2015
vers. 1.0.0

1 Teilbarkeit

Einstieg

1.1 Zeige, dass 900 ein Teiler von 10! ist.

1.2 Das Produkt zweier Zahlen, von denen keine durch 10 teilbar ist, beträgt 1000. Bestimme die Summe dieser Zahlen.

1.3 Finde alle natürlichen Zahlen n, sodass n ein Teiler von $n^2 + 3n + 27$ ist.

Fortgeschritten

1.4 Zeige:

(a) $5 \cdot 17 \mid 5^2 \cdot 17 + 3 \cdot 5 \cdot 9 + 5 \cdot 3 \cdot 8$

(b) $n(n+m) \mid 3mn^2 + amn^2 + 3n^3 + an^3$

1.5 Bestimme drei dreistellige natürliche Zahlen, in deren Darstellung 9 verschiedene Ziffern vorkommen, so, dass ihr Produkt mit vier Nullen endet.

1.6 (a) Bestimme alle natürliche Zahlen, die genau 41 Teiler haben und durch 41 teilbar sind.

(b) Bestimme alle natürliche Zahlen, die genau 42 Teiler haben und durch 42 teilbar sind.

Olympiade

1.7 Finde alle natürlichen Zahlen n mit $n + 1 \mid n^2 + 1$.

1.8 Zeige: Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es n aufeinanderfolgende Zahlen, von denen keine prim ist.

1.9 Zeige, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, sodass $2n$ ein Quadrat, $3n$ eine dritte Potenz und $5n$ eine fünfte Potenz ist.

2 ggT und kgV

Einstieg

2.1 (IMO 59) Zeige, dass sich folgender Bruch nicht kürzen lässt:

$$\frac{21n+4}{14n+3}$$

2.2 Finde alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen mit

$$\mathrm{kgV}(a, b) = 10\,\mathrm{ggT}(a, b)$$

Fortgeschritten

2.3 Jede natürliche Zahl > 6 ist die Summe zweier teilerfremder natürlicher Zahlen > 1.

2.4 Wir nennen natürliche Zahlen a und b *befreundet*, wenn $a \cdot b$ eine Quadratzahl ist. Beweise, dass wenn a und b befreundet sind, dann sind auch a und $ggT(a, b)$ befreundet.

Olympiade

2.5 Seien m und n zwei natürliche Zahlen, deren Summe eine Primzahl ist. Zeige, dass m und n teilerfremd sind.

2.6 (Kanada 97) Bestimme die Anzahl Paare (x, y) natürlicher Zahlen mit $x \leq y$, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\mathrm{ggT}(x, y) = 5! \text{ und } \mathrm{kgV}(x, y) = 50!$$

3 Abschätzungen

Einstieg

3.1 Wir nennen ein Rechteck *schön*, wenn die Längen der Seiten natürliche Zahlen sind und die Masszahlen für die Fläche und den Umfang des Rechtecks übereinstimmen. Bestimme alle *schönen* Rechtecke.

3.2 Finde alle Paare (x, y) natürlicher Zahlen mit

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1.$$

Fortgeschritten

3.3 Wir nennen einen Quader *schön*, wenn die Längen der Seiten natürliche Zahlen sind und die Masszahlen für die Oberfläche und das Volumen des Quaders übereinstimmen. Bestimme alle *schönen* Quader.

3.4 Finde alle Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen mit

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1.$$

3.5 Finde alle natürlichen Zahlen n, sodass $n^2 + 1$ ein Teiler von $n^7 + 13$ ist.

Olympiade

3.6 Zeige, dass die Gleichung

$$y^2 = x(x+1)(x+2)(x+3)$$

keine Lösung in positiven ganzen Zahlen besitzt.

3.7 Finde alle natürlichen Zahlen x, für die gilt

$$x! = x^2 + 11x - 36$$

3.8 (IMO 98) Bestimme alle Paare natürlicher Zahlen (a, b), sodass $a^2b + a + b$ durch $ab^2 + b + 7$ teilbar ist.

4 Aufgaben aus vergangenen Olympiaden

Alte Prüfungsaufgaben sind für die Vorbereitung sehr geeignet; einerseits entsprechen sie natürlich dem Prüfungsniveau, und andererseits sind alle Lösungen zu den Aufgaben auf der Homepage `www.imosuisse.ch` zu finden. Man sollte jedoch immer zuerst selbst an den Aufgaben gearbeitet haben, bevor man sich die Musterlösungen dazu anschaut!

1. **(Vorrunde 2012, 1.)** Bestimme alle Paare (m, n) natürlicher Zahlen, sodass $(m+1)(n+2)$ durch mn teilbar ist.

2. **(Vorrunde 2004, 1.)** Finde alle natürlichen Zahlen a, b und n, sodass die folgende Gleichung gilt:

$$a! + b! = 2^n$$

3. **(Vorrunde 2005, 3.)** Seien m, n zwei teilerfremde natürliche Zahlen. Zeige, dass dann auch die beiden Zahlen $m^3 + mn + n^3$ und $mn(m+n)$ teilerfremd sind.

4. **(Vorrunde 2011, 2.)** Finde alle natürlichen Zahlen n, sodass n^3 das Produkt aller positiven Teiler von n ist.

5. **(Vorrunde 2006, 1.)** Finde alle Tripel (p, q, r) von Primzahlen, sodass auch die drei Differenzen

$$\mid p - q \mid, \mid q - r \mid, \mid r - p \mid$$

alle Primzahlen sind.

6. **(Vorrunde 2008, 4.)** Finde alle natürlichen Zahlen n, sodass die Anzahl positiver Teiler von n gleich dem drittkleinsten positiven Teiler von n ist.

7. **(Vorrunde 2013, 4.)** Finde alle Paare (m, n) natürlicher Zahlen, für die gilt:

$$(m + 1)! + (n + 1)! = m^2 n^2$$