

Aufgaben Kombinatorik

Aktualisiert: 12. November 2016
vers. 1.2.0

1 Zählaufgaben

Einstieg

- 1.1 Wie viele positive vierstellige Zahlen gibt es, mit:
- a) alles gleichen Ziffern?
 - b) einer ungeraden Anfangsziffer?
 - c) einer geraden Anfangsziffer?
 - d) alles unterschiedlichen Ziffern?
 - e) keinen zwei gleichen Ziffern nebeneinander?
- 1.2 Auf wie viele verschiedene Arten kann man 10 Personen in zwei Basketballteams je 5 Personen aufteilen?
- 1.3 Auf wieviele Arten lässt sich aus drei Rosenarten ein Blumenstrauss mit 12 Blumen zusammensetzen?
- 1.4 Wie viele verschiedene Permutationen der Buchstaben folgender Wörter gibt es?
- a) VELOS
 - b) PAPIER
 - c) BANANE
 - d) MINIMUM
- 1.5 Vier Spieler A, B, C, D erhalten je dreizehn Karten (aus einem Spiel mit 52 Karten). Auf wie viele Arten können die Karten verteilt werden?

Fortgeschritten

- 1.6 Eine Gesellschaft bestehend aus 12 Personen macht eine Bootsfahrt und muss sich daher auf drei Boote verteilen. Das erste Boot fasst 5, das zweite 4 und das letzte Boot 3 Personen. Auf wieviele Arten können sich die Personen auf die Boote verteilen?

Wieviele Möglichkeiten bleiben übrig, wenn man annimmt, dass sich unter den 12 Personen ein Ehepaar befindet, das nicht getrennt werden möchte?

1.7 Wie viele vierstellige Zahlen gibt es, mit:

- a) genau drei verschiedenen Ziffern?
- b) mindestens zwei gleichen Ziffern?
- c) zwei geraden und zwei ungeraden Ziffern?

2 Andere Aufgaben

Einstieg

2.1 Seien $k \leq n$ zwei natürliche Zahlen. Auf wie viele Arten kann man k verschiedene Bälle an n Kinder verteilen, so dass jedes Kind höchstens ein Ball bekommt?

2.2 2 parallele Geraden sind gegeben. Man wählt 10 Punkte auf der ersten und 11 Punkte auf der zweiten Geraden. Wie viele

- a) Vierecke
- b) Dreiecke

Mit den Eckpunkten in den gewählten Punkten gibt es?

2.3 Wie viele positive ganze Zahlen kleiner als 2014 sind durch 3 oder 4 teilbar aber nicht durch 5?

2.4 Wie viele sechsstellige Zahlen gibt es, für die folgende Bedingung erfüllt ist:
Jede nächste Ziffer ist strikt kleiner als die vorhergehende?

Fortgeschritten

2.5 n Personen sitzen an einem runden Tisch. Zwei Sitzordnungen werden als gleich betrachtet, wenn jede Person die gleichen zwei Nachbarn hat. Wieviele verschiedene Sitzordnungen gibt es?

2.6 Auf wie viele Arten kann man 8 ununterscheidbare Türme auf ein Schachbrett setzen, so dass keine zwei Türme einander bedrohen?

2.7 Wieviele ganzzahlige Lösungen hat die Gleichung $x + y + z + w = 100$, wenn $x, y, z, w \geq 8$ gelten soll?

2.8 Ein Lottotipp besteht aus einer 6-elementigen Teilmenge von $\{1, 2, \dots, 45\}$. Wieviele Tipps gibt es und wieviele davon enthalten zwei aufeinanderfolgende Zahlen?

- 2.9 Eine Spinne hat eine Socke und einen Schuh für jedes ihrer acht Beine. Auf wieviele Arten kann sie diese anziehen, wenn sie bei jedem Bein zuerst die Socke anziehen muss?

Olympiade

- 2.10 Auf wieviele Arten kann man aus einer Menge mit n Elementen zwei disjunkte Teilmengen auswählen, wobei es nicht auf die Reihenfolge ankommen soll? (Beachte: die leere Menge ist auch eine Teilmenge.)
- 2.11 Wie viele Teilmengen mit einer geraden Anzahl Elementen kann man aus einer Menge mit n Elementen auswählen?
- 2.12 In einer Sprache gibt es n Buchstaben. Eine Folge von Buchstaben ist genau dann ein Wort, wenn zwischen zwei gleichen Buchstaben nie zwei gleiche Buchstaben stehen.
- Was ist die grösstmögliche Länge eines Wortes?
 - Wieviele Wörter maximaler Länge gibt es?

3 Aufgaben aus vergangenen Olympiaden

Alte Prüfungsaufgaben sind für die Vorbereitung sehr geeignet; einerseits entsprechen sie natürlich dem Prüfungsniveau, und andererseits sind alle Lösungen zu den Aufgaben auf der Homepage www.imosuisse.ch zu finden. Man sollte jedoch immer zuerst selbst an den Aufgaben gearbeitet haben, bevor man sich die Musterlösungen dazu anschaut!

- Vorrunde 2008, 2.** Ein *Weg* in der Ebene führt vom Punkt $(0, 0)$ zum Punkt $(6, 6)$, wobei man in jedem Schritt entweder um 1 nach rechts oder um 1 nach oben gehen kann. Wieviele Wege gibt es, die weder den Punkt $(2, 2)$ noch den Punkt $(4, 4)$ enthalten?
- Vorrunde 2009, 2.** Betrachte n Kinder, von denen keine zwei gleich gross sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Kinder in eine Reihe zu stellen, sodass jedes Kind ausser dem grössten einen Nachbarn besitzt, der grösser ist als es.
- Vorrunde 2010, 3.** Auf wieviele Arten kann man jeder Ecke eines Würfels eine der Zahlen $1, 2, 3, \dots, 10$ zuordnen, sodass keine Zahl mehrfach verwendet wird, und so dass für jede Seitenfläche die Summe der Zahlen in den vier angrenzenden Ecken ungerade ist?
- Vorrunde 2011, 4.** Gegeben ist eine ringförmige Busroute mit $n \geq 2$ Haltestellen, welche in beide Richtungen befahren werden kann. Die Strecke zwischen zwei benachbarten Haltestellen nennen wir Abschnitt. Eine der Haltestellen heisst Zürich. Ein Bus soll in Zürich starten, dann exakt $n + 2$ Abschnitte weit fahren und sich am Ende wieder in Zürich befinden. Dabei muss er jede Haltestelle mindestens einmal besuchen. Er kann bei jeder Haltestelle wenden. Wie viele mögliche Fahrtrouten gibt es?

5. **Vorrunde 2012, 2.** Gegeben sind $6n$ Chips in $2n$ verschiedenen Farben, sodass es von jeder Farbe genau 3 Chips hat. Diese Chips sollen auf zwei Stapel A und B verteilt werden, sodass beide Stapel dieselbe Anzahl Chips enthalten und kein Stapel drei gleichfarbige Chips enthält. Wieviele Möglichkeiten gibt es, dies zu tun, wenn
- die Reihenfolge der Chips innerhalb der Stapel keine Rolle spielt?
 - die Reihenfolge wichtig ist?
6. **Vorrunde 2013, 3.** Wir nennen eine natürliche Zahl sympathisch, falls die Ziffern ihrer Dezimaldarstellung die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:
- Jede der Ziffern $0, 1, \dots, 9$ kommt höchstens einmal vor.
 - Ist A eine gerade und B eine ungerade Ziffer, so liegen genau $\frac{A+B-1}{2}$ andere Ziffern zwischen A und B .
- Bestimme die Anzahl sympathischer Zahlen.
7. **Vorrunde 2014, 3.** Wie viele achtstellige natürliche Zahlen gibt es, für die jede Ziffer entweder strikt grösser als alle Ziffern links davon oder strikt kleiner als alle Ziffern links davon ist?
Beispiel: 45326791