# Aufgaben Induktion

Aktualisiert: 5. November 2018
vers. 2.0.0

## 1 Aufgaben

### Einstieg

1.1 Zeige, dass $n^2 + n$ für alle natürlichen Zahlen $n$ gerade ist.

1.2 Sei $n \geq 3$. Zeige, dass die Innenwinkelsumme in einem $n$-Eck $(n-2) \cdot 180$ Grad beträgt.

1.3 Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a)
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

(b)
$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

(c)
$$1^2 + 2^2 \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(d)
$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n-1}{n!} = \frac{n!-1}{n!}$$

(e)
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

1.4 Bestimme alle natürlichen Zahlen $n$, sodass $3^n > n!$ gilt.

1.5 Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

1.6 Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $7^{2n} - 2^n$ durch 47 teilbar ist.

### Fortgeschritten

1.7 Zeige, dass jede natürliche Zahl als Summe von verschiedenen Zweierpotenzen darstellbar ist.

1.8 Zeige: Die Zahlen $1007, 10017, 100117, 1001117, \ldots$ sind alle durch 53 teilbar.

1.9 $n$ Geraden unterteilen die Ebene in verschiedene Gebiete. Ein Gebiet ist ein Flächenstück, durch das im Inneren keine Gerade geht. Zeige, dass es höchstens $\frac{n^2+n+2}{2}$ verschiedene Gebiete gibt.

1.10 **Vorrunde 2016, 2.** Quirin hat $n$ Klötze mit den Höhen 1 bis $n$ und möchte diese so nebeneinander aufstellen, dass sich seine Katze von links nach rechts über sie hinwegbewegen kann. Die Katze kann dabei jeweils auf den nächsten Klotz springen, falls dieser tiefer oder um 1 höher ist. Zu Beginn wird die Katze auf den Klotz am linken Ende gesetzt. Wie viele Möglichkeiten hat Quirin, die Klötze in einer solchen Reihe aufzustellen?
*Bemerkung: Für* $n = 5$ *ist* $3-4-5-1-2$ *eine Möglichkeit,* $1-3-4-5-2$ *jedoch nicht.*

1.11 $n$ Punkte in der Ebene sind entweder blau oder rot gefärbt. Wir verbinden alle roten mit allen blauen Punkten. Zeige, dass wir nicht mehr als $\frac{n^2+n-2}{4}$ Verbindungen haben können.

1.12 Wieviele Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es, die keine 2 aufeinanderfolgenden Elemente enthalten?

1.13 Sei $n \geq 2$. In einem Restaurant sitzen $n$ Personen in einer Reihe. Es gibt 3 Menus zur Wahl. Keine der Personen möchte das gleiche essen wie die Nachbarn links und rechts. Auf wieviele Arten können die Leute ihr Essen bestellen?

1.14 Wir haben $n$ verschieden grosse Bücher und drei verschiedene Platten, auf denen die Bücher liegen können. Am Anfang sind alle Bücher der Grösse nach geordnet (das kleinste Buch zuoberst) auf Platte 1. In einem Zug dürfen wir das oberste Buch einer Platte auf eine andere Platte legen. Es darf dabei jedoch nie ein grösseres Buch auf einem kleineren zu liegen kommen. Wie viele Züge werden mindestens benötigt, um alle Bücher auf Platte 3 zu bringen?

## Olympiade

1.15 Sei $n \geq 6$. Zeige, dass wir ein Quadrat in $n$ quadratische Teile zerschneiden können.

1.16 Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachte ein $2^n \times 2^n$-Schachbrett, aus dem ein beliebiges Feld entfernt wurde. Zeige, dass es möglich ist, dieses mit L-Triominos zu bedecken.

1.17 Auf einer runden Rennstrecke stehen $n$ identische Autos. Zusammen haben sie genau soviel Benzin, wie ein einziges Auto benötigt, um eine ganze Runde fahren zu können. Ein Auto fährt los, während alle anderen stehen bleiben. Kommt es an einem stehenden Auto vorbei, dann übernimmt es das Benzin aus dem Tank des stehenden Autos. Zeige, dass es ein Auto gibt, das die ganze Runde fahren kann, ohne dass ihm das Benzin ausgeht.

1.18 In einer Schüssel liegen $n \geq 2$ Bonbons. Alice und Bob spielen das folgende Spiel: In einem Zug darf man eine positive Anzahl Bonbons aus der Schüssel nehmen, aber nicht mehr als die Hälfte aller Bonbons. Alice und Bob machen abwechslungsweise Züge und Alice beginnt. Wer in seinem Zug ein einzelnes Bonbon übrig lässt, verliert. Für welche $n$ hat Bob eine Gewinnstrategie?