Vollständige Induktion

Aktualisiert: 8. November 2018

vers. 2.1.0

Eine der wichtigsten Beweistechniken der Mathematik überhaupt ist die (vollständige) *Induktion*. Wir nehmen an, wir hätten für jede natürliche Zahl n eine Aussage $A(n)$, die richtig oder falsch sein kann. Beispiele für solche Aussagen sind:

1. *Die Zahl n ist gerade.*
2. *Es gilt $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$.*
3. *Es gibt mindestens eine Primzahl p mit $n \leq p < 2n$.*

Wenn wir nun zeigen können, dass es ein n_0 gibt, sodass $A(n_0)$ richtig ist (*Induktionsverankerung*) und dass aus der Richtigkeit von $A(n)$ jene von $A(n+1)$ folgt (*Induktionsschritt*), dann sind offenbar alle Aussagen $A(n)$ für $n \geq n_0$ richtig. Denn die Richtigkeit hüpft sozusagen von einem n aufs nächste über. Wir geben gleich mal Beispiele.

Beispiel 1. *Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt*

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Verankerung:
Die Gleichung stimmt sicher für $n=1$, denn beide Seiten sind dann gleich 1.

Induktionsschritt:
Wir nehmen an, dass die Gleichung für n richtig ist und zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ richtig ist. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}1+2+\ldots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der ersten Zeile die Induktionsannahme verwendet, nämlich, dass die Gleichung für n stimmt. □

Beispiel 2. *Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ besitzt eine Primfaktorzerlegung (das heisst, n ist ein Produkt von endlich vielen Primzahlen).*

Beweis. Wir verwenden starke Induktion nach n. Dies ist richtig für $n=2$, da 2 eine Primzahl ist. Wir nehmen nun an, dass alle Zahlen $k < n$ eine Primfaktorzerlegung besitzen, n aber keine solche besitzt. Dann ist n sicher nicht prim, das heisst, n ist ein Produkt von zwei natürlichen

Zahlen $a > 1$ und $b > 1$. Wegen $a, b < n$ lassen sich a und b nach Induktionsvoraussetzung als Produkt von Primzahlen schreiben. Dann ist aber auch $n = ab$ ein Produkt von Primzahlen, im Widerspruch zu unserer Annahme. Daher besitzt n eine Primfaktorzerlegung und der Induktionsschritt ist komplett. $\square$