Trigonometrische Substitutionen

Aktualisiert: 26. Juni 2014

Ab und zu erinnern algebraische Ausdrücke irgendwie an trigonometrische Formeln. In diesen Fällen lassen sie sich oft vereinfachen oder ausrechnen, indem man eine geeignete trigonometrische Substitution ausführt. Um dieses mächtige Verfahren allerdings wirkungsvoll einsetzen zu können, sollte man mit den Additionstheoremen und den Summen-zu-Produkt Formeln einigermassen vertraut sein.

Beispiel 1. *Die Folge (x_n) erfülle die Rekursionsgleichung*

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}x_n - 1}{x_n + \sqrt{3}}, \quad n \geq 1.$$

Zeige, dass die Folge periodisch ist.

Lösung. Kürzt man die Rekursionsgleichung mit $\sqrt{3}$, dann lautet sie

$$x_{n+1} = \frac{x_n - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + x_n \frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

Dies erinnert an die Formel für den Tangens einer Differenz:

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

Es ist daher naheliegend, $x_1 = \tan t$ zu substituieren. Zusammen mit $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ folgt nun aus der Rekursionsgleichung $x_2 = \tan(t - \pi/6)$ und mit Induktion $x_n = \tan(t-(n-1)\pi/6)$. Insbesondere gilt $x_{n+6} = x_n$ und die Folge ist periodisch.

$\square$

Beispiel 2. *Die reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n \in [-1, 1]$ erfüllen $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 0$. Zeige, dass gilt*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq \frac{n}{3}.$$

Wann steht das Gleichheitszeichen?

Lösung. Die Einschränkung $-1 \leq x_k \leq 1$ könnte ein Hinweis sein, x_k als Sinus oder Cosinus zu interpretieren. Ausserdem wissen wir etwas über die dritten Potenzen der x_k

und möchten daraus auf die x_k selbst schliessen. Ein möglicher Zusammenhang liefert die Tripelwinkelformel für den Cosinus:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Schreibe also $x_k = \cos\alpha_k$ mit $0 \leq \alpha_k \leq \pi$ (α_k ist dadurch eindeutig bestimmt). Nun gilt

$$0 = 4\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \sum_{k=1}^{n} 4\cos^3\alpha_k = \sum_{k=1}^{n} 3\cos\alpha_k + \cos 3\alpha_k = 3\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} \cos 3\alpha_k,$$

und somit auch

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \cos 3\alpha_k \leq \frac{n}{3}.$$

Steht das Gleichheitszeichen, dann muss $\cos 3\alpha_k = -1$ sein für $1 \leq k \leq n$. Wegen $\alpha_k \in [0, \pi]$ also $\alpha_k = \pi/3$ oder $= \pi$ und damit $x_k = \frac{1}{2}$ oder $= -1$. Nehme an, m der Variablen x_k seien gleich -1 und $n - m$ gleich $\frac{1}{2}$. Da die Summe der dritten Potenzen gleich 0 sein muss, gilt

$$\sum x_k^3 = -m + \frac{1}{8}(n - m),$$

also $n = 9m$. Umgekehrt sieht man leicht, dass in diesen Fällen tatsächlich Gleichheit gilt.

$\square$

Aufgaben

1. Für welche reellen Zahlen a gibt es eine reelle Zahl x mit

$$\sqrt{1 - x^2} \geq a - x?$$

2. Finde alle reellen Folgen (x_k), sodass für alle $n \geq 1$ gilt $\sqrt{x_{n+2} + 2} \leq x_n \leq 2$.

3. Bestimme alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x + x^2 y &= y, \\ 2y + y^2 z &= z, \\ 2z + z^2 x &= x. \end{aligned}$$

4. Zeige, dass für alle reellen Zahlen x, y gilt

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(x + y)(1 - xy)}{(1 + x^2)(1 + y^2)} \leq \frac{1}{2}.$$

5. Finde alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^3 - 3x &= y, \\ y^3 - 3y &= z, \\ z^3 - 3z &= x. \end{aligned}$$

6. Zeige, dass man unter 7 reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_7$ stets zwei auswählen kann, für die gilt

$$0 \leq \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

7. (IMO 76) Sei $P_1(x) = x^2 - 2$ und $P_n(x) = P_1(P_{n-1}(x))$ für $n \geq 2$. Zeige, dass für jedes $n \geq 1$ die Lösungen der Gleichung $P_n(x) = x$ alle reell und verschieden sind.

8. (China 96) Sei n eine natürliche Zahl. Es gelte $x_0 = 0$, $x_1, \ldots, x_n > 0$ und $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Zeige, dass gilt

$$1 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_0 + x_1 + \ldots + x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i + \ldots + x_n}} < \frac{\pi}{2}.$$

9. (Korea 98) Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $a + b + c = abc$. Beweise die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

10. Finde alle Lösungen $x, y, z \in (0,1)$ der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1.$$

Tipps

1. Der Term unter der Wurel ist ≥ 0, also ist $-1 \leq x \leq 1$. Setze $x = \cos\alpha$.

2. Verdoppelungsformel für den Cosinus.

3. Keine der drei Variablen ist ± 1. Daher kann man die Gleichungen nach einer Variablen auflösen. Die auftretenden Terme sollten bekannt vorkommen.

4. Die vier Faktoren erinnern irgendwie auch an etwas, vor allem $1 - xy$.

5. Die linken Seiten haben Ähnlichkeit mit der Trippelwinkelformel für den Cosinus aus Beispiel 2. Es fehlt allerdings ein Faktor 4. Wie behebt man dieses Problem? Vieleicht hilft es auch zu bemerken, dass alle drei Variablen zwischen -2 und 2 liegen (wieso?).

6. Wonach sieht es denn aus? Beispiel 1.

7. Beachte die Doppelwinkelformel für den Cosinus.

8. Bei genauer Betrachtung haben die Nenner alle die Form $\sqrt{1+s_i} \cdot \sqrt{1-s_i}$. Und die Zähler?

9. Versucht das mal direkt zu homogenisieren, dann wird klar, wie praktisch trigonometrische Substitutionen sind! Aber was ist denn so besonders an der Nebenbedingung $a + b + c = abc$? Das ist nicht so einfach zu sehen. Substituiert $a = \tan\alpha, b = \tan\beta, c = \tan\gamma$, was ist der Zusammenhang zwischen α, β und γ?

10. Das funktioniert so ähnlich wie mit der Nebenbedingung in Aufgabe 9. Allerdings ist hier nicht der Tangens wichtig, wie auch schon aus der Bedingung $x, y, z \in (0, 1)$ folgt. Ausprobieren!