Terme paaren

Aktualisiert: 26. Juni 2014

Gewisse Summen lassen sich einfacher berechnen, indem man gewisse Summanden zu Gruppen zusammenfasst. Meistens paart man dabei zwei Terme. Als einfaches Beispiel berechnen die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n mit einer Idee, die C. F. Gauss als Siebenjähriger bereits hatte:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k &= (1+n) + (2+(n-1)) + (3+(n-2)) + \ldots + (n+1) \\ &= \underbrace{(n+1) + \ldots + (n+1)}_{n} = n(n+1). \end{aligned}$$

Dies ist gerade die bekannte Formel $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$. Wir haben also jeweils die beiden Terme k und $n+1-k$ zusammengefasst und so identische Summanden erhalten. Ähnliche Ideen liegen folgenden Aufgaben zu Grunde.

Aufgaben

1. Beweise, dass für jede natürliche Zahl n gilt

$$n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}$$

2. (APMO 2000) Für $n = 1, \ldots, 101$ sei $a_n = n/101$. Berechne den Wert der Summe

$$\frac{a_1^3}{1-3a_1+3a_1^2} + \frac{a_2^3}{1-3a_2+3a_2^2} + \ldots + \frac{a_{101}^3}{1-3a_{101}+3a_{101}^2}.$$

3. (CH 98) Für $x > 0$ sei $f(x) = 4^x/(4^x+2)$. Bestimme den Wert der Summe

$$\sum_{k=1}^{1290} f\left(\frac{k}{1291}\right).$$

4. (IMO 79) Zeige, dass wenn die Zahl

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$

als gekürzter Bruch geschrieben wird, dann ist der Zähler durch 1979 teilbar.

5. (CH 05) Sei $p > 3$ eine Primzahl. Zeige, dass p^2 ein Teiler ist von

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p+1}.$$