Teleskopreihen und -produkte

Aktualisiert: 5. Juli 2016
vers. 1.0.0

Oft kann man Summen und Produkte geschickt umformen, sodass sie eine besonders einfache Struktur erhalten. Eine Summe der Form

$$\sum_{k=1}^{n} F(k+1) - F(k)$$

heisst *Teleskopsumme*. Natürlich heben sich die meisten Terme weg, sodass der Wert der Summe gleich $F(n+1) - F(1)$ ist. Analog nennt man ein Produkt der Form

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{F(k+1)}{F(k)}$$

ein *Teleskopprodukt*. Sein Wert ist $F(n+1)/F(1)$. Die Schwierigkeit bei der ganzen Sache ist natürlich, einen gegebenen Ausdruck so umzuschreiben, dass er die gewünschte Form erhält. Es folgen nun einige Beispiele.

Beispiel 1. *Berechne die Summe* $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$.

Lösung. Es gilt $k \cdot k! = (k+1-1)k! = (k+1)! - k!$. Damit wird die Summe zu

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)! - k! = (n+1)! - 1.$$

□

Beispiel 2. *Zeige, dass für jede natürliche Zahl N gilt*

$$\prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{2}.$$

Lösung. Die Idee ist, zu faktorisieren. Es gilt

$$\begin{aligned} \prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \prod_{n=2}^{N} \frac{n-1}{n} \prod_{n=2}^{N} \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \frac{N+1}{2} = \frac{N+1}{2N} > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Beachte, dass das ursprüngliche Produkt kein Teleskopprodukt ist. Erst die Aufspaltung in zwei Teile macht die Berechnung möglich. □

Ein polynomialer Bruch, dessen Nenner das Produkt von zwei Polynomen ist, lässt sich stets als Summe (oder eben als *Differenz*) von zwei einfacheren Brüchen schreiben. Dies ist ein Spezialfall der sogenannten Partialbruchzerlegung. Diese Beobachtung hilft beim Auffinden von Teleskopsummen, wie das nächste (etwas schwierigere) Beispiel zeigt.

Beispiel 3. *Berechne die Summe*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1}.$$

Lösung. Der Nenner erinnert an die Identität von Sophie Germain:

$$4a^4 + b^4 = (2a^2 + 2ab + b^2)(2a^2 - 2ab + b^2).$$

Damit erhält man nun

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k^2+2k+1)-(2k^2-2k+1)}{(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k^2-2k+1} - \frac{1}{2k^2+2k+1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k^2-2k+1} - \frac{1}{2(k+1)^2-2(k+1)+1} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{2n^2+2n+1}.
\end{aligned}$$

□

Manche Summen und Produkte, die trigonometrische Ausdrücke enthalten, lassen sich mit dieser Methode ebenfalls berechnen. Wichtig ist dabei die Kenntnis der gebräuchlichsten Additionstheoreme und der Summen-zu-Produkt Formeln.

Beispiel 4. *Finde den Wert von*

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx.$$

Lösung. Ist $x = 2m\pi$ für $m \in \mathbb{Z}$, dann hat die Summe den Wert n. Ist x nicht von dieser Form, dann multiplizieren wir die Summe mit $2\sin x/2$ (das ist $\neq 0$ nach Voraussetzung!) und erhalten mit Hilfe der Produkt-zu-Summen Formel für ein Produkt von Sinus und Cosinus

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos kx &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x \right) \\
&= \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{1}{2}x.
\end{aligned}$$

Die ursprüngliche Summe hat daher den Wert

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(x/2)} - \frac{1}{2}.$$

□

Aufgaben

1. Berechne die Summe
$$\sum_{k=1}^{n} k!(k^2+k+1).$$

2. Sei $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eine arithmetische Folge mit Differenz d. Finde den Wert von
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k a_{k+1}}.$$

3. Berechne
$$\sum_{n=1}^{1999} \sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}.$$

4. Berechne die Summe
$$\sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{1}{k^2+k+1}.$$

5. (Putnam 84) Finde den Wert der (unendlichen) Summe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}.$$

6. Beweise die Ungleichung
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{999}{1000} < \frac{1}{\sqrt{1001}}.$$

7. (USA 92) Zeige, dass gilt
$$\frac{1}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ}+\frac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ}+\ldots+\frac{1}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ}=\frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}.$$

8. Berechne die Summe
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}.$$

9. Zeige, dass gilt
$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}} > 24.$$

10. Berechne die Summe
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-\frac{1}{2}}{k^4+\frac{1}{4}}.$$

11. Sei n eine natürliche Zahl und a eine reelle Zahl, sodass der Bruch a/π irrational ist. Finde den Wert der Summe

$$\frac{1}{\cos a - \cos 3a} + \frac{1}{\cos a - \cos 5a} + \ldots + \frac{1}{\cos a - \cos(2n+1)a}.$$

12. (USA 96) Zeige, dass das arithmetische Mittel der Zahlen $n \sin n^\circ$ für $n = 2, 4, 6, \ldots, 180$ gleich $\cot 1^\circ$ ist.

13. (Putnam) Zeige, dass gilt

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}.$$

14. Berechne das Produkt

$$\frac{(1^4 + \frac{1}{4})(3^4 + \frac{1}{4}) \cdots ((2n-1)^4 + \frac{1}{4})}{(2^4 + \frac{1}{4})(4^4 + \frac{1}{4}) \cdots ((2n)^4 + \frac{1}{4})}.$$

15. Sei $F_1 = F_2 = 1, F_3 = 2, \ldots$ die Fibonaccifolge. Berechne die Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^n}}.$$

16. (Shortlist 01) Seien $x_1, \ldots, x_n$ beliebige reelle Zahlen. Zeige, dass gilt

$$\frac{x_1}{1 + x_1^2} + \frac{x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} + \ldots + \frac{x_n}{1 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} < \sqrt{n}.$$

17. Zeige, dass für jede natürliche Zahl N gilt

$$\prod_{n=0}^{N} \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right) < 2.$$

18. Berechne den Wert des Produkts

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \tan^2 \frac{2^k \pi}{2^n + 1}\right).$$

19. (Shortlist 2015, A1) Suppose that a sequence $a_1, a_2, \ldots$ of positive real

$$a_{k+1} \geq \frac{k a_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

for every positive integer k. Prove thath $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$ for every $n \geq 2$.

Tipps

1. Siehe Beispiel 1.

2. Der Nenner des Bruchs ist ein Produkt, der Bruch lässt sich als Differenz von zwei einfacheren schreiben (vergleiche Beispiel 3.)

3. Der Wurzelterm lässt sich vereinfachen. Danach wie Aufgabe 2.

4. Hier benötigt man das Additionstheorem für den Arcustangens:

$$\arctan u \pm \arctan v = \arctan \frac{u \pm v}{1 \mp uv},$$

welches aus dem Additionstheorem für den Tangens folgt (Beweis?).

5. Siehe Beispiel 3.

6. Es fehlt die Hälfte der Faktoren für ein Teleskopprodukt. Wie könnte man die herzaubern? Wieso steht auf der rechten Seite eine Wurzel?

7. Verwende die Identität

$$\frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} = \tan a - \tan b.$$

8. Zuerst sollte man den Nenner rationalisieren. Das heisst, erweitere so, dass der Nenner rational wird. Danach wie Beispiel 3.

9. Auch hier fehlt die Hälfte der Summanden. Siehe Aufgabe 6.

10. Siehe Beispiel 3.

11. Wende erst die Differenz-zu-Produkt Formel auf die Nenner an. Eine Formel wie im Hinweis zu Aufgabe 7. existiert auch für den Cotangens. Leite sie her und verwende sie.

12. Multipliziere mit $\sin 1^\circ$ und verwende die Produkt-zu-Differenz Formel, um die Summe zu vereinfachen. Danach muss man sich an die Symmetrie der Cosinusfunktion erinnern.

13. Vergleiche Beispiel 2.

14. Verwende die Identität von Sophie Germain.

15. Beweise zuerst mit Induktion die Formel

$$F_{2m}F_{m-1} - F_{2m-1}F_m = (-1)^m F_m, \quad m \geq 1.$$

Verwende sie für $m = 2^{n-1}$, $n \geq 2$, um die Summe umzuformen.

16. Die linke Seite ist keine Teleskopreihe, aber nicht allzuweit davon entfernt. Diesen Defekt kann man durch anwenden einer Standardungleichung beheben. Beachte die Wurzel rechts.

17. Siehe Beispiel 2.

18. Verwende die Doppelwinkelformel für den Tangens.