Explizite Formeln für rekursiv definierte Folgen

Aktualisiert: 26. Juni 2014

In diesem Skript wird erklärt, wie man explizite Formeln für rekursiv definierte Folgen findet. Als Ausgangspunkt betrachten wir eine Folge $a_0, a_1, \dots$ reeller (oder auch komplexer) Zahlen, die gegeben ist durch die Werte $a_0, \dots, a_{n-1}$ und die Rekursionsgleichung

$$a_{k+n} + c_{n-1}a_{k+n-1} + \ldots + c_1 a_{k+1} + c_0 a_k = 0 \qquad \forall k \geq 0, \tag{1}$$

Wobei die c_i Konstanten sind. Offenbar ist die Folge dadurch eindeutig bestimmt. Wir suchen eine explizite Form für die Folgeglieder und machen dazu den Ansatz $a_n = \lambda^n$. Einsetzen in (1) führt zu der Gleichung

$$\operatorname{chp}(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0 = 0$$

(unabhängig von k). Die linke Seite nennt man das *charakteristische Polynom* der Rekursionsgleichung. Also muss λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Rekursionsgleichung sein. Diese Nullstellen führen zu den sogenannten *Fundamentallösungen*, die wir jetzt beschreiben. Dabei gibt es gewisse Probleme, wenn das charakteristische Polynom mehrfache Nullstellen hat. Ohne die Behauptungen zu beweisen (was recht schwierig ist) folgt nun eine Beschreibung, wie man vorzugehen hat.
Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Nullstellen von $\operatorname{chp}(\lambda)$ mit jeweiligen Vielfachheiten $m_1, \dots, m_r \geq 1$. Betrachte für jedes $1 \leq i \leq r$ die m_i verschiedenen Fundamentallösungen

$$F_{i,j}(k) = k^j \cdot \lambda_i^k, \qquad 0 \leq j \leq m_i - 1.$$

Nun ist die Folge a_k eine eindeutig bestimmte Linearkombination dieser Fundamentallösungen. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Satz 0.1. *Es gibt eindeutig bestimmte (komplexe) Konstanten $C_{i,j}$, sodass gilt*

$$a_k = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i-1} C_{i,j} \cdot F_{i,j}(k), \qquad \forall k \geq 0.$$

Die Koeffizienten $C_{i,j}$ findet man durch Einsetzen von $k = 0, 1, \dots, n-1$ in obige Gleichung und Auflösen des resultierenden linearen Gleichungssystems mit n Gleichungen in den n Variablen $C_{i,j}$.
Der Satz beschreibt natürlich den kompliziertesten Fall, dieser tritt in den Anwendung praktisch nie auf. Wir geben zur Illustration nun ein paar Beispiele.

Beispiel 1. *Die Fibonaccifolge ist definiert durch* $a_0 = 0, a_1 = 1$ *und die Rekursionsformel* $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ *für* $n \geq 0$*. Finde eine explizite Formel für* a_n*.*

Lösung. Das charakteristische Polynom ist $\mathrm{chp}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$. Die beiden Nullstellen lauten $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$ und haben beide Vielfachheit 1. Die beiden Fundamentallösungen sind daher $F_1(n) = ((1+\sqrt{5})/2)^n$ und $F_2(n) = ((1-\sqrt{5})/2)^n$. Es gilt also eine Formel der Form

$$a_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Die Konstanten $C_{1,2}$ bestimmt man nun mit Hilfe der Werte $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Es muss folgendes Gleichungssystem erfüllt sein:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2, \\ 1 &= C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right). \end{aligned}$$

Dies führt zu $C_1 = 1/\sqrt{5}$ und $C_2 = -1/\sqrt{5}$, also gilt die folgende berühmte Formel von Binet:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right].$$

□

Beispiel 2. *Die Lucasfolge ist ähnlich wie die Fibonaccifolge definiert durch* $b_1 = 1, b_2 = 3$ *und die Rekursionsformel* $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ *für* $n \geq 0$*. Finde auch hier eine explizite Formel.*

Lösung. Um die Rechnung zu vereinfachen und die Folge bei b_0 starten zu lassen, setzen wir einfach $b_0 = 2$ (dies ist konsistent mit der Rekursionsgleichung). Die Lucas- und Fibonaccifolge besitzen dieselbe Rekursionsgleichung und damit auch dieselben Fundamentallösungen. Nur die Konstanten sind anders. Hier lautet das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2 &= C_1 + C_2, \\ 1 &= C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right). \end{aligned}$$

Die Lösungen sind $C_1 = C_2 = 1$, damit gilt

$$b_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

□

Hat man diese expliziten Ausdrücke erstmal zur Hand, lassen sich damit natürlich viele spektakuläre Dinge beweisen. Ein eher harmloses Beispiel ist die bekannte Limesformel für die Fibonaccifolge:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Die Zahl rechts nennt man *goldenen Schnitt.* Er tritt in sehr natürlicher Weise bei optimalen Platzverteilungsproblemen auf. Dies mag vielleicht eine Erklärung dafür liefern, wieso die Fibonaccifolge in der Natur dauernd auftritt (zählt mal die Anzahl Spiralen eines Tannenzapfens oder die Spiralen in einem Sonnenblumenboden).

Beim nächsten Beispiel treten mehrfache Nullstellen im charakteristischen Polynom auf:

Beispiel 3. *Zwei Folgen a_n und b_n, $n \geq 0$, erfüllen folgende Gleichungen:*

$$\begin{aligned} b_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} \\ b_n + b_{n-2} &= 4(a_{n-1} + a_{n-3}). \end{aligned}$$

Ausserdem gelte $a_0 = a_1 = 1$ und $b_2 = b_3 = 4$. Finde eine explizite Formel für a_n.

Lösung. Setzt man die erste Gleichung in die zweite ein, dann folgt $a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - 2a_{n-3} + a_{n-4} = 0$ für alle $n \geq 4$. Das charakteristische Polynom $\mathrm{chp}(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda^2+1)(\lambda-1)^2$ hat die doppelte Nullstelle $\lambda = 1$ und die beiden konjugiert komplexen Nullstellen $\lambda = \pm i$. Gemäss Satz 1 gibt es also Konstanten A, B, C, D mit

$$a_n = A + B \cdot n + C \cdot i^n + D \cdot (-i)^n.$$

Aus den gegebenen Anfangswerten und der ersten Gleichung oben berechnet man leicht $a_2 = 2$ und $a_3 = 1$. Wir erhalten also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= A + C + D \\ 1 &= A + B + iC - iD \\ 2 &= A + 2B - C - D \\ 1 &= A + 3B - iC + iD \end{aligned}$$

mit der Lösung $A = 2$, $B = -1/2$, $C = (-2+i)/4$ und $D = (-2-i)/4$. Einsetzen und ausrechnen ergibt die Formeln

$$a_n = \begin{cases} 1 - n/2 & n \equiv 0 \pmod 4 \\ 3/2 - n/2 & n \equiv 1 \pmod 4 \\ 3 - n/2 & n \equiv 2 \pmod 4 \\ 5/2 - n/2 & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

□

Dieses Beispiel zeigt ein weiteres Phänomen: Obwohl die Folge a_n offensichtlich reell ist, können in der expliziten Formel durchaus komplexe Terme auftauchen. Wenn die

Rekursionsgleichung aber reelle Koeffizienten hat, dann treten die komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms in konjugierten Paaren auf, also auch die komplexen Terme in der expliziten Formel. Sind nun auch die Anfangswerte reell, dann sind die zugehörigen Koeffizienten ebenfalls konjugiert und nach geeigneter Umformung fallen alle Imaginärteile aus der Formel raus. Es bleibt etwas reelles übrig. Dies kann man beweisen, aber für euch genügt es zu wissen, dass es so ist. Im konkreten Anwendungsfall ist meist schnell klar, wie sich was wegkürzt.

Nun aber mal eine richtige Anwendung.

Beispiel 4. *Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, sodass für alle $x > 0$ gilt*

$$f(f(x)) + f(x) = 2x.$$

Lösung. Sei $a > 0$ beliebig. Definiere eine Folge a_n durch $a_0 = a$ und $a_{n+1} = f(a_n)$. Dann gilt nach Voraussetzung die Rekursionsgleichung $a_{n+2}+a_{n+1} = 2a_n$. Das charakteristische Polynom hat die Nullstellen 1 und -2, also gibt es Konstanten A und B mit

$$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot (-2)^n.$$

Da f nur positive Werte annimmt, müssen alle Folgeglieder a_n positiv sein. Wäre nun $B \neq 0$, dann gibt es sicher grosse Werte für n, sodass die rechte Seite der obigen Formel negativ ist, Widerspruch. Daher gilt $B = 0$ und $a_0 = A = a_1$, also $f(a) = a$. Da a beliebig war, haben wir gezeigt:

$$f(x) = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_{>0}.$$

□

Eine explizite Darstellung kann also durchaus nützlich sein. Mindestens ebenso wichtig ist aber die umgekehrte Richtung. Oft erinnern Terme an explizite Darstellungen von rekursiv definierten Folgen. Mit Hilfe der Rekursionsgleichung lassen sich Aussagen über Teilbarkeit und ähnliches einfacher beweisen. Dazu auch ein Beispiel.

Beispiel 5. *Gibt es eine ungerade natürliche Zahl n, sodass $\lfloor(2+\sqrt{5})^n\rfloor$ durch 99 teilbar ist?*

Lösung. Der gegebene Ausdruck ist in dieser Form überhaupt nicht zugänglich für Teilbarkeitsbetrachtungen. Aus gewissen Symmetrieüberlegungen könnte man aber stattdessen den Ausdruck

$$a_n = (2 + \sqrt{5})^n + (2 - \sqrt{5})^n \tag{2}$$

betrachten. Wir werden gleich zeigen, dass dies eine ganze Zahl ist. Daraus und aus der Abschätzung $0 > 2 - \sqrt{5} > -1$ folgt direkt, dass für *ungerades* n in der Tat gilt $\lfloor(2+\sqrt{5})^n\rfloor = (2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n$. Der Ausdruck in (2) erinnert an die explizite Formel einer rekursiv definierten Folge. Diese Rekursionformel werden wir jetzt rekonstruieren.

Das charakteristische Polynom muss die beiden Nullstellen $2 \pm \sqrt{5}$ haben, also ist $\text{chp}(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 1$. Die Rekursionformel lautet demnach

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} + a_n.$$

Ausserdem ist $a_0 = 2$ und $a_1 = 4$. Somit ist a_n ganz für alle $n \geq 0$. Wir müssen entscheiden, ob a_n durch 99 teilbar sein kann. Dazu betrachten wir die Folge modulo 9 und modulo 11. Eine kurze Rechnung mit der Rekursionsformel liefert die minimalen Perioden $2, 4, 0, 4, 7, 5, 0, 5$ modulo 9 und $2, 4, 7, 10, 3, 0, 3, 1, 7, 7$ modulo 11. Daraus folgt $9 \mid a_n \Leftrightarrow n \equiv 2, 6 \pmod 8$ und $11 \mid a_n \Leftrightarrow n \equiv 5 \pmod{10}$. Diese beiden Kongruenzen sind nie gleichzeitig erfüllt, daher ist a_n nie durch 99 teilbar.

$\square$

Aufgaben

1. Sei F_n die Fibonacci- und L_n die Lucasfolge, wie oben definiert. Zeige, dass gilt

$$\prod_{k=0}^{n} L_{2^k} = F_{2^{n+1}}.$$

2. (IMO 79) Seien A und E zwei gegenüberliegende Ecken eines regulären 8-ecks. Ein Frosch startet bei A und hüpft von jeder Ecke ausser E auf eine benachbarte Ecke. Landet er in E, bleibt er sitzen. Sei a_n die Anzahl verschiedener Wege von A nach E der Länge n. Zeige, dass gilt $a_{2n-1} = 0$ und

$$a_{2n} = \frac{(2+\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}} - \frac{(2-\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}}.$$

3. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, sodass für alle $x > 0$ gilt

$$f(f(f(x))) + f(f(x)) + f(x) = 3x.$$

Verallgemeinere.

4. (Ersatz-IMO 80) Bestimme die erste Ziffer vor und nach dem Komma in der Dezimaldarstellung von

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^{1980}.$$

5. Bestimme die grösste Zweierpotenz, die ein Teiler ist von

$$\left\lfloor (1+\sqrt{3})^n \right\rfloor.$$

6. (Shortlist 88) Sei b die grösste reelle Nullstelle des Polynoms $x^3 - 3x^2 + 1$. Zeige, dass $\lfloor b^{1788} \rfloor$ und $\lfloor b^{1988} \rfloor$ beide durch 17 teilbar sind.