Théorie des graphes

Anna Devic

Actualisé: 1er décembre 2015
vers. 1.0.0

Voici un exemple d'exercice que nous classifierions comme appartenant à la théorie des graphes :

A une fête avec 21 participants chaque invité compte le nombre de personnes qu'il vient de rencontrer ce soir-là. Est-il possible que la somme de ces décomptes soit un nombre impair ?

Il est très probable que quelques minutes de réflexion vous suffiront pour résoudre ce problème même si vous n'avez jamais entendu parler de graphes. De manière générale, dans ce domaine on rencontre souvent des exercices qu'on arrive à résoudre rien qu'avec des méthodes *ad hoc*, c'est-à-dire qu'on invente sur place, dans le but concret de l'appliquer à la situation en question. A quoi nous sert donc la théorie des graphes, me demandez-vous ? Elle nous permet de ne pas devoir "réinventer la roue" à chaque fois en nous fournissant un cadre et un vocabulaire adéquats pour traiter une grande famille de problèmes similaires sous plusieurs angles.

1 Définitions

Intuitivement, un *graphe* est un ensemble de points, dont certaines paires sont directement reliées par un lien. Ces liens peuvent être orientés, c'est-à-dire qu'un lien entre deux points u et v relie soit u vers v, soit v vers u : dans ce cas, le graphe est dit *orienté*. Sinon, les liens sont symétriques, et le graphe est*non-orienté*. *Graph* *gerichtet* *ungerichte*

Les points sont appelés les *sommets* (ou parfois les *noeuds*). Les liens sont appelés *arêtes* dans les graphes non-orientés et *arcs* dans les graphes orientés. *Ecken* *Kanten*

L'ensemble des sommets est le plus souvent noté V (du mot anglais *vertex*, sommet), tandis que E (du mot anglais *edge*, arête) désigne l'ensemble des arêtes. Dans le cas général, un graphe peut avoir des *arêtes multiples*, c'est-à-dire que plusieurs arêtes différentes relient la même paire de points. De plus, un lien peut être une *boucle*, c'est-à-dire ne relier qu'un point à lui-même. Un graphe est *simple* si il n'a ni liens multiples ni boucles. *Mehrfachk* *Schlinge* *schlicht*

Dans ce qui suit nous allons nous restreindre à des graphes simples (et la plupart du temps non-orientés, sauf précision contraire). Un tel graphe peut être défini simplement par un couple $G = (V, E)$, où E est un ensemble de paires d'éléments de V. Dans le cas d'un graphe simple orienté, E est un ensemble de couples d'éléments de V.

Voici maintenant une liste de définitions utiles.

— Deux sommets d'un graphe sont dits *adjacents* s'il existe une arête qui les relie. *benachbart*

- Un sommet est *incident* à une arête s'il est situé à un des deux extrémités de cette arête. Inversement, une arête est *incidente* à un sommet s'il relie ce sommet à un (autre) sommet. *inzident*
- Le *degré* $Deg(v)$ d'un sommet v est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. *Grad*
- Un graphe est *biparti* si l'ensemble de ses sommets peut être décomposé en deux sous-ensembles disjoints V_1 et V_2 tels que chaque arête ait une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2. *bipartit*
- Le *nombre chromatique* d'un graphe est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorer les sommets sans que deux sommets adjacents soient de la même couleur. *chromatisc Zahl*
- Le graphe *complet* à n sommets, noté K_n, est le graphe qui contient toutes les $\binom{n}{2}$ arêtes possibles. *vollständig*
- Pour un sous-ensemble U de sommets, le *sous-graphe induit* $G[U]$ est obtenu en supprimant tous les sommets en dehors de U et en gardant seulement les arrêtes dont les deux extrémités sont dans U. *induzierter Unter-graph*
- Un *clique* est un sous-graphe induit qui est complet. *Clique*
- Une *chaîne* est une suite de sommets adjacents. Une chaîne est dite *simple* si chaque arête y apparaît au plus une fois et *élémentaire* si chaque sommet y apparaît au plus une fois (on parle alors de *chemin*). Une chaîne est dite *fermée* si le point de départ et d'arrivée sont les mêmes. *Kantenzug* *Weg* *geschlosser*
- Un *cycle* est une chaîne fermée simple si seul le sommet de départ apapraît deux fois dans la chaîne. *Kreis*
- Un graphe est dit *connexe* s'il existe une chaîne reliant chaque paire de sommets. On peut décomposer chaque graphe en *composantes connexes*. *zusammen* *Komponen*
- Un *arbre* est un graphe connexe qui ne contient pas de cycles. *Baum*
- Une *forêt* est une collection d'arbres, c-à-d un graphe non nécessairement connexe qui ne contient pas de cycles. *Wald*
- Un graphe est dit *planaire* si l'on peut le dessiner sur une surface plate sans que ses arêtes se croisent. *plättbar*
- Un graphe est dit *eulérien* s'il est possible de trouver un cycle passant une et une seule fois par toutes les arêtes. *eulersch*
- Un graphe est dit *hamiltonien* s'il est possible de trouver un cycle passant une et une seule fois par tous les sommets. *hamiltonsc*

2 Premiers outils

Voici quelques résultats bien connus qu'on peut montrer sans utiliser de théorèmes compliqués. Réfléchir aux preuves vous aidera à développer une certaine intuition pour des arguments de théorie des graphes avant de vous attaquer aux exercices plus sérieux.

1. La somme de tous les degrés est égal au double du nombre d'arêtes. En déduire que le nombre de sommets de degré impair est toujours un nombre pair.
2. Tout arbre contient un sommet de degré 1, appelé *feuille*. *Blatt*

3. Tout arbre peut être construit en commencant par un unique sommet et en ajoutant une par une des feuilles.
4. Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycles de longueur impaire.
5. Un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair contient un circuit eulérien.
6. Soit G un graphe dont tous les degrés valent au plus Δ. Alors le nombre chromatique de G est $\leq \Delta + 1$.
7. Soit G un graphe dont tous les degrés valent au moins $\delta \geq 2$. Alors G contient un cycle de taille $\geq \delta + 1$.
8. Un graphe qui a au moins autant d'arêtes que de sommets contient un cycle.
9. Il est possible de partitionner les sommets d'un graphe en deux groupes disjoints tels que pour chaque sommet on ait qu'au moins la moitié des sommets qui lui sont adjacents se retrouvent dans l'autre groupe.
10. (Théorème de Dirac.) Soit G un graphe à n sommets dont tous les sommets sont de degré au moins $n/2$. Alors G contient un cycle hamiltonien.

3 Exercices

1. (Tournament of the towns 1986) 20 équipes de foot participent à un tournoi. Le premier jour chaque équipe joue un match. Le deuxième jour chaque équipe joue un deuxième match. Montrer qu'à la fin du deuxième jour il est possible de choisir 10 équipes telles qui pas encore joué l'une contre l'autre.
2. (BAMO 2006/1) Dans une salle de classe il y a $n \times n$ chaises arrangées en forme carrée (c'est-à-dire en n rangées et n colonnes) et chaque chaise est occupée par un élève. Le professeur décide de réarranger les élèves en suivant deux règles :
   (a) Chaque élève change de place.
   (b) Chaque élève se déplace à une chaise adjacente dans la même rangée ou dans la même colonne. En d'autres termes, il se déplace d'une chaise soit horizontalement soit vertiacalement.

   Montrer qu'il est possible d'effectuer un tel réarrangement si n est pair et impossible si n est impair.
3. (Mathematical circles) En Orientalie chaque route est à sens unique et on peut atteindre n'importe quelle ville à partir de n'importe quelle autre en empruntant au plus deux routes. Depuis quelques jours, une route est fermée pour cause de travaux mais il est toujours possible de conduire d'une ville à une autre. Montrer qu'alors on peut le faire en empruntant au plus trois routes.
4. (BAMO 2004/3) La NASA a décidé de mettre 2004 colonies sur Mars. Le seul moyen possible de passer d'une colonie à une autre va être un tunnel. Un bureaucrate dessine une carte de Mars en mettant N tunnels connecteurs de façon à ce que chaque paire de colonie soit reliée par au plus un tunnel. Quelle est la plus petite valeur de N qui garantit que, peu importe la façon dont les tunnels sont placés, il sera toujours possible de passer d'une colonie à une autre ?

5. (St-Pétersbourg 1996/4) Dans un groupe contenant au moins deux personnes, certaines se connaissent entre elles et d'autres pas. Chaque soir une personne du groupe invite toutes ses connaissances à une fête et les présente les unes aux autres. Supposons qu'après que tout le monde ait organisé au moins une fête, il existe deux personnes qui ne se connaissent toujours pas. Montrer que ce procédé ne va alors jamais leur permettre de se rencontrer.
6. (Shortlist IMO 2004/C4) L'opération suivante est permise dans un graphe fini : choisir un cycle arbitraire de longueur 4 (s'il en existe), choisir une des arêtes de ce cycle et l'effacer du graphe. Pour un nombre naturel $n \geq 4$ fixé, trouver le plus petit nombre d'arêtes avec lequel on peut se retouver en partant de K_n et en itérant l'opération autant de fois que possible.
7. (USAMO 1989/2) Les 20 membres d'un club de tennis ont planifié exactement 14 matches de simple entre eux de telle façon que tout le monde joue au moins une partie. Montrer qu'avec une telle planification on trouve toujours 6 parties qui sont jouées par 12 joueurs distincts.
8. (Russie 1998/48) Il y a 1998 villes en Russie telles que chacune d'entre elles est reliée (dans les deux sens) à trois autres villes par des vols. Chaque ville peut être atteinte depuis n'importe quelle autre ville par une suite de vols. Le KGB a décidé de fermer temporairement 200 villes dont aucune paire n'est reliée par un vol direct. Montrer qu'il est possible de faire ceci tout en s'assurant que les villes dont l'aéroport n'est pas fermée restent reliées entre elles.
9. (Sélection suisse 2005/8) Considérons un lac avec deux îles au milieu et sept villes sur le bord du lac. Dans ce qui suit, nous allons appeler les îles et les villes des *endroits*. Entre deux endroits, il y a une correspondance par bateau exactement quand
   (i) il s'agit des deux îles,
   (ii) il s'agit d'une ville et d'une île,
   (iii) il s'agit de deux villes non voisines.

   Chacune des correspondances est desservie par exactement une de deux compagnies de navigation concurrentes. Montrer qu'il existe toujours trois endroits tels que les correspondances qui les relient deux à deux sont assurées par la même compagnie.
10. (Sélection suisse 2009/11) On considère n points colinéaires $P_1, \ldots, P_n$ et tous les cercles avec diamètre P_iP_j pour $1 \leq i < j \leq n$. Chacun de ces cercles est coloré avec une de k couleurs. Un tel ensemble de cercles colorés s'appelle un (n, k)-*fouillis*. Un *huit unicolore* consiste en deux cercles de même couleur qui sont tangents de l'extérieur. Montrer que tout (n, k)-fouillis contient un huit unicolore si et seulement si on a $n > 2k$.
11. (Sélection suisse 2004/9) Soit X un ensemble avec n éléments et soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des sous-ensembles distincts de X. Montrer qu'il existe un $x \in X$ tel que les ensembles

$$A_1 \setminus \{x\}, A_2 \setminus \{x\}, \ldots, A_n \setminus \{x\}$$

   sont deux à deux distincts.

Note : Cette introduction s'inspire majoritairement de *Graphentheorie* de Reinhard Diestel et des notes de Po-Shen Loh pour la préparation aux Olympiades de l'équipe des Etats-Unis. Les deux sont disponibles en libre accès sur Internet, Google vous y mènera si vous voulez lire plus sur le sujet.