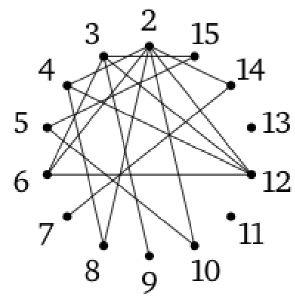
Von Kernideen zu Olympiaden
Graphentheorie – Lösungen

Dima Nikolenkov

15. April 2013

1 Kernidee

Was ist ein Graph? Ein einfacher Graph ist eine Menge von Punkten (Ecken), von denen einige durch Kanten verbunden sind. Wann braucht man einen Graph? Jedes Mal, wenn wir in einer Menge von Elementen irgendwelche Beziehungen zwischen diesen Elementen haben. Die Art der Beziehung ist irrelevant. Relevant ist nur, ob zwei Elemente "verbunden" oder nicht "verbunden" sind. Diese Verbindung nennen wir weiterhin eine Kante.



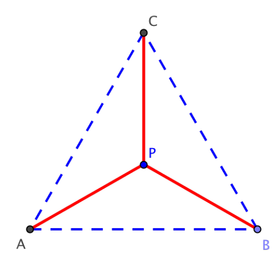
Bevor wir formale Definitionen anschauen, betrachten wir einige Aufgaben, wo die Graphen hilfreich sein können.

2 Einführende Aufgaben

Aufgabe 1 – Klassik Bekanntschaften.

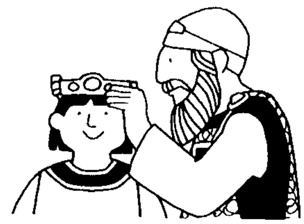
Gibt es in jeder Menge von sechs Personen drei, die sich paarweise kennen, oder drei, die sich paarweise nicht kennen?
Lösung:
Jede Person stellen wir als Punkt dar und jede Bekanntschaft als eine rote Verbindungsstrecke. Wenn zwei Personen sich nicht kennen verbinden wir sie mit einer blauen Kante.
Idee: Es gibt viele Kanten, also wird es irgendein gleichfarbiges Dreieck geben.

Formalisierung: Wir wählen eine Ecke P (Peter). Es gibt 5 weitere Personen, also gibt es nach dem Schubfachprinzip mindestens 3 gleichfarbige Kanten, die von P aus in die anderen Ecken laufen, z.B. rote. Betrachten wir das Dreieck aus den drei Enden dieser Kanten.
Sollte eine Kante auch rot sein, sind wir fertig. Sonst sind sie alle blau und wir sind auch fertig.



Aufgabe 2 Nachkommen.

König Grunz hatte drei Söhne. Unter seinen Nachkommen hatten 100 Personen 2 Söhne, die anderen starben kinderlos.



Wie viele Nachkommen hatte König Grunz?

Lösung:
Was ist die Beziehung hier? Offensichtlich Vater-Sohn. Also ordnen wir jeder Person eine Ecke zu und verbinden nur diejenigen, die in einer Beziehung Vater-Sohn sind. Naja ... diese Beziehung ist aber nicht symmetrisch, d.h. wir brauchen einen *orientierten* Graph. Wir zeichnen einen Pfeil von der Ecke Vater zur Ecke Sohn. Es ist auch sinnvoll diese Pfeile graphisch etagenweise (nach Generationen) darzustellen.

Jetzt übersetzen wir unsere Aufgabe in die Sprache der Graphentheorie.

Wir haben einen orientierten Graph mit unbekannter Anzahl Ecken. Von einer fixierten Ecke (König Grunz) gehen 3 Kanten aus und keine geht hinein. In jede andere Ecke geht eine Kante hinein (jeder Sohn hat einen Vater) und gehen entweder genau 2 oder keine Kanten heraus. Dabei gibt es 100 Ecken aus denen genau 2 Kanten herausgehen. Gesucht ist die Anzahl Ecken.

Berechnen wir die Anzahl Kanten. Es gibt $3 + 100 \cdot 2 = 203$ Kanten. Jede Kante geht genau in eine Ecke hinein, also gibt es auch 203 Ecken.

Aufgabe 3 Volleyballturnier.
In einem Turnier spielen n Mannschaften. Jede Mannschaft spielt gegen jede andere genau einmal.

Beweise, dass man die Mannschaften so durchnummerieren kann, dass für jedes $1 \leq i \leq n-1$ die Mannschaft mit der Nummer $i+1$ gegen die Mannschaften mit der Nummer i gewonnen hat.
Lösung:
Wie so oft bei den konstruktiven Aufgaben im Bereich der Graphentheorie, wenden wir die vollständige Induktion an.

Basis (Verankerung): für $n = 1$ und $n = 2$ ist die gewünschte Nummerierung klar.

Induktionsschritt: Angenommen, die gewünschte Nummerierung für n Mannschaften ist vorhanden.

Wir betrachten ein Turnier mit $n+1$ Mannschaften. Die ersten n kann man durchnummerieren wie gewünscht per Annahme. Falls die $(n+1)$-te Mannschaft A gegen alle gewonnen hat, bekommt sie die Nummer $n+1$. Sonst wählen wir die Mannschaft mit der kleinsten Nummer m unter denen, die gegen A gewonnen haben. Wir stellen die Mannschaft A in unserer Liste **direkt** vor die Mannschaft m.

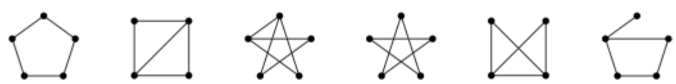
3 Definitionen und Fakten

Definition 1 *Ein einfacher Graph $G = (V, E)$ besteht aus Knoten (Ecken) V und Kanten (Bögen) E, die jeweils zwei Knoten verbinden.*

Eine Multikante *besteht zwischen zwei Knoten u und v, wenn nicht nur eine Kante, sondern mehrere Kanten zwischen ihnen liegen.*

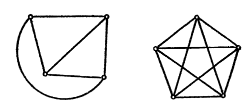
Eine Schlinge *ist eine Kante mit dem gleichen Anfangs- und Endknoten.*

Ein **einfacher** *Graph besitzt keine Multikanten und Schlingen.*



Einige Graphen besitzen spezielle Namen – hier ist eine Sammlung der Definitionen.

Definition 2 *Ein Graph ist vollständig, wenn er alle möglichen Kanten enthält.*
Er wird mit K_n bezeichnet und hat $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten.



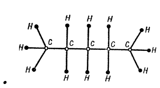
Definition 3 *Ein* Kantenzug *in G ist eine Folge $W = v_0, v_1, \ldots, v_k$ von Knoten. Wenn die Kanten von W alle verschieden sind, dann ist W ein* **Weg**.

Wenn die Knoten alle verschieden sind, dann ist W ein Pfad *(oder einfacher Weg).*

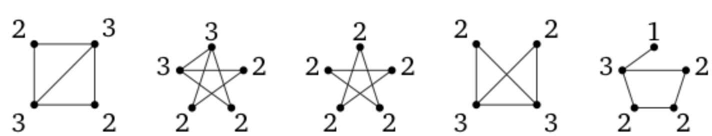
Die Länge von W ist gleich der Anzahl von Kanten von W, also k. Ein Kreis *ist ein geschlossener ($v_0 = v_k$) Kantenzug.*

Ein **Zyklus** *ist ein geschlossener Pfad.*

Definition 4 *Ein zusammenhängender Graph ohne Zyklen heisst* **Baum**.



Definition 5 Grad *einer Ecke ist die Anzahl Kanten, die mit dieser Ecke verbunden sind. Ein Graph heisst k-regulär, wenn jede Ecke derselben Grad k hat (Stern ist 2-regulär).*



Satz 1 *Die Summe der Grade aller Ecken eines einfachen Graphen ist gleich der verdoppelten Anzahl der Kanten.*
Beweis: Doppelt zählen der Paare (Kante, Ecke aus der diese Kante läuft). □

Corollary 1 *Paritäten:*
a) Die Anzahl der Ecken ungeraden Grades ist immer gerade.
b) Ist ein Graph k-regulär, dann muss entweder k oder die Anzahl Ecken gerade sein.

Satz 2 *In einem Graph mit mindestens zwei Ecken gibt es zwei Ecken desselben Grades.*
Beweis: Indirekter Beweis mit dem Schubfachprinzip. □

4 Aufgaben – Niveau 1

Aufgabe 4.1
In einem bestimmten Königreich gibt es 100 Städte, und aus jeder Stadt führen genau 4 Strassen hinaus. Wieviele Strassen gibt es in diesem Königreich?
Lösung:
$100 \cdot 4 : 2 = 200$ Strassen.

Aufgabe 4.2
In einem Ziegenstall leben zwei Ziegenarten - Kreti und Pleti. Jedes Kreti ist mit 6 Kretis und 9 Pletis befreundet. Jedes Pleti ist mit 10 Kretis und 7 Pletis befreundet.

Von welcher Arten Ziegen gibt es mehr im Ziegenstall?
Lösung:
Es gibt mehr Kretis (10:9).

Aufgabe 4.3
Man zeige, dass es keinen Graph mit 5 Ecken, deren Grade die Werte 4, 4, 4, 4 und 2 haben, gibt.
Lösung:
Aus der fünften Ecke müsste auch 4 Kanten herauslaufen.

Aufgabe 4.4
In einer Klasse sind 20 Schülerinnen. Jede ist mit mindestens 14 anderen befreundet. Kann man behaupten, dass es 4 Schülerinnen gibt, die paarweise befreundet sind?
Lösung:
Wir versammeln die ganze Klasse in einem Zimmer und setzen Alina vorne. Dann schicken wir alle Schülerinnen, die mit Alina nicht befreundet sind weg. Im Zimmer bleiben mindestens 15 Mädchen. Dann wählen wir Barbara und schicken aus dem Zimmer alle, die mit Barbara nicht befreundet sind. Im Zimmer sind jetzt mindestens 10 Mädchen. Wir wählen Cathy und wiederholen den Vorgang, dann bleiben im Zimmer mindestens 5 Mädchen – Alina, Barbara und Cathy (sind paarweise befreundet) und noch 2. Man wähle noch jemanden.

Reduktion des Graphen

Aufgabe 4.5
a) Beweisen Sie, dass man die Kanten eines Würfels mit den Zahlen $1, 2, \ldots 11, 12$ nicht so durchnummerieren kann, dass die Summen der Zahlen auf den von einer Ecke ausgehenden Kanten immer gleich sind.

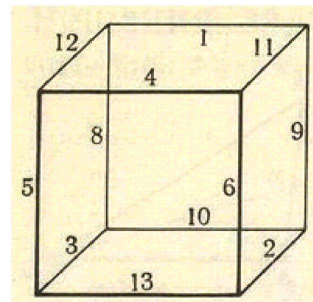
b) Kann man eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 12, 13$ entfernen und mit den restlichen Zahlen die Kanten des Würfels so anschreiben?
Lösung:
a) Es sei S die Summe der drei Zahlen an den Kanten, die in einer Ecke zusammenkommen. Dann sollte gelten $8S = 2(1 + 2 + \cdots + 12) = 13 \cdot 12 = 156$. Daraus folgt $S = \frac{39}{2} \notin \mathbb{N}$. Also ist es unmöglich.

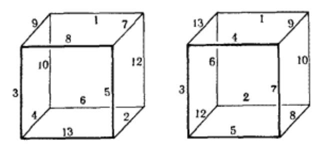
b) Gleich wie in a) sollte gelten

$$S = \frac{1+2+3+\cdots+13-k}{4} = \frac{91-k}{4}$$

d.h. für k kommen nur 3, 7, oder 11 in Frage.

Die Konstruktionen sind auf dem Bild. Es gibt nur zwei (bis auf die Drehung und die Spiegelung) Lösungen für $k = 3$ und $k = 11$. Man bekommt sie, wenn man k durch "symmetrische" Zahl $14 - k$ ersetzt.
Hinweis: Es ist sinnvoll gewisse Symmetrien dieser Konstruktion zu merken, z.B. dass die gegenüberliegende Kanten einer Seite dieselbe Differenz aufweisen müssen, wie zwei andere parallele Kanten.
Hilfreich ist auch die drei Summanden Summen aufzuschreiben, die den Wert S geben, z.B. für $S = 21$ gibt es nur zwei Triples, die 13 enthalten und 7 nicht – (13, 6, 2) und (13, 5, 3) und zwei "symmetrische" Triples mit einer 1.





Aufgabe 4.6
20 Computer sind mit Netzwerkkabeln verbunden. Jedes Kabel verbindet zwei Computer, jedes Computerpaar ist mit höchstens einem Kabel verbunden und von jedem Computer gehen höchstens 2 Kabel weg.

Man möchte die Kabel so färben, dass von jedem Computer verschiedenfarbige Kabel ausgehen. Welches ist die minimale Anzahl Farben, die dazu benötigt werden?
Lösung:
Im Netzwerkgraph hat jede Ecke den Grad höchstens 2, d.h. der Graph zerfällt in nicht geschlossene Wege und einfache Zyklen. Jeder Weg kann man mit zwei Farben färben (abwechslungsweise schwarz und weiss), jedes Zyklus mit drei Farben (eine Kante rot, die anderen abwechslungsweise schwarz und weiss).

Wenn im Netzwerk drei Computer paarweise verbunden sind reichen zwei Farben nicht aus.

Konstruktion Moskau 1988

5 Aufgaben – Niveau 2

Aufgabe 5.1

1. Ein Stück Draht ist 120 cm lang. Kann man es biegen, um einen Würfel zu formen, dessen Kanten 10 cm lang sind?
2. Welches ist die kleinste Zahl von Schnitten, die man machen muss, um den verlangten Würfel zu erhalten?

Lösung:
1) Wenn es möglich wäre, könnte man den Graph des Würfels zeichnen ohne den Stift vom Papier zu nehmen. Der Würfel hat aber 8 ungeraden Ecken (jede hat den Grad 3), also geht es nicht.

2) Das es 8 ungeraden Ecken gibt, braucht es mindestens 4 Stück Draht. D.h. man muss den Draht drei Mal durchtrennen, die Konstruktion ist einfach.

Aufgabe 5.2
In einer Ohrfeigenrunde sitzen 15 Teilnehmer. Jeder Teilnehmer hat genau k andere Teilnehmer geohrfeigt. Für welche kleinste Zahl k kann man behaupten, dass es zwei Teilnehmer gibt, die sich gegenseitig geohrfeigt haben?
Lösung:
Wenn $k = 8$ ist dann gibt es $15 \cdot 8 = 120$ "gerichteten Ohrfeigen" $> \binom{15}{2} = 105$ Paare der Teilnehmer. Daraus folgt, dass es zwei Ecken gibt, die mit mindestens zwei Kanten verbunden sind.

Andererseits mit 7 kann man es konstruieren – wir setzen die Teilnehmer in Kreis und jeder ohrfeigt seine 7 Nachbar im Uhrzeigersinn.

Aufgabe 5.3
Man bestimme die grösstmögliche Anzahl Kanten in einem Graph mit n Ecken mit folgender Eigenschaft:
Unter drei beliebigen Ecken gibt es zwei, die nicht mit einer Kante verbunden sind.
Lösung:
Idee: durch ausprobieren sollte man auf die Idee kommen die n Ecken in zwei "fast gleiche" Gruppen aufzuteilen und jede Ecke einer Gruppe mit jeder Ecke der anderen Gruppe zu verbinden.

Formalisierung: Wir bezeichnen die Anzahl Kanten im gesuchten Graph M_n. Wir betrachten zwei Fälle:
1) $n = 2k$, dann ist $M_n = |K_{k,k}| = k^2$ Kanten;
2) $n = 2k + 1$, dann ist $M_n = |K_{k+1,k}| = k(k + 1)$ Kanten.

Wir beweisen die Behauptung, dass das die besten Graphen sind via Induktion nach k.

Basis: für $n = 2$ und $n = 3$ die Aussage ist offensichtlich richtig.

Induktionsschritt:
Fall 1: Wir nehmen an, dass die Aussage für $n = 2k-1$ stimmt. Wir zeigen, dass $M_{2k} = k^2$. Angenommen es ist nicht so, d.h. $M_{2k} > k^2$.

In jedem Graph mit $2k$ Ecken und mehr als k^2 Kanten wird die Ecke mit minimalem Grad nicht mehr als mit k anderen Ecken verbunden sein(Widerspruchsbeweis noch einmal: wenn nicht gibt es $a_1, a_2, \ldots, a_k$ inzidenten Ecken, wir nehmen z.B. a_1. Es gilt $\deg(a_1) > k$ dann gibt es $b_1, b_2, \ldots, b_k$ andere Ecke (von a_i verschieden, da Dreiecke verboten sind). Also gibt es mindestens $2k + 1$ Ecken).

Also gibt es in diesem Graph eine Ecke mit $\deg \leq k$. Wir entfernen diese Ecke samt allen Kanten. Dann bekommen wir einen Graph mit $2k - 1$ Ecken und mit $M_{2k} - k > k^2 - k = k(k-1)$ Kanten, was der Annahme widerspricht.

Analog betrachtet man den zweiten Fall.

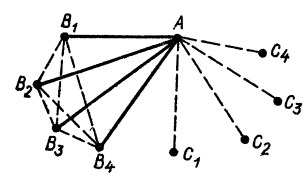
Aufgabe 5.4
Im dreidimensionalen Raum werden 9 Punkte gewählt. Keine 3 liegen auf einer Geraden. Jeder Punkt ist mit genau 4 anderen mit einer geradelinigen Kante verbunden.

Man beweise, dass es mindestens ein Dreieck mit Ecken in diesen Punkten gibt.
Lösung:
Wir betrachten ein kompletter Graph mit diesen 9 Punkten als Ecken und die Kanten, die 2 Punkte verbinden, färben wir rot, alle andere Kanten färben wir blau.

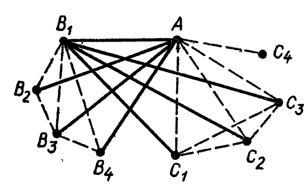
Wir müssen zeigen, dass es ein rotes Dreieck gibt.

Angenommen es ist nicht wahr.

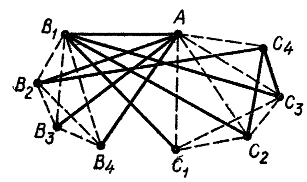
Es sei A eine Ecke, die mit B_1, B_2, B_3 und B_4 mit roten Kanten verbunden ist und mit C_1, C_2, C_3 und C_4 mit blauen Kanten. Dann sind die Kanten B_iB_j blau.
Jede B_i ist mit drei roten Kanten mit C_j verbunden.
Zwei rote Kanten verbinden zwei Ecken von Typ C (da es 12 rote Kanten B_iC_j gibt).



Es sei B_1 mit roten Kanten mit C_1, C_2 und C_3 verbunden. Dann müssen diese C unter einander mit blauen Kanten verbunden sein. Dann gehört C_4 zwei roten Kanten der Form C_4C_j, z.B. C_4C_3 und C_4C_2.



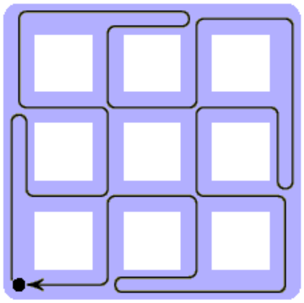
Andererseits gehört C_4 zwei weiteren roten Kanten, z.B. C_4B_2. Mindestens eine Kante aus B_2C_2 und B_2C_3 ist auch rot, also wird $\Delta B_2C_3C_4$ oder $\Delta B_2C_2C_4$ rot sein.



Aufgabe 5.5
Ein Dorf ist gebaut in der Form eines 3×3 Quadrates. Man möchte alle Strassen im Dorf teeren. Die Teermaschine fährt in der linken unteren Ecke A des Quadrates los und beendet ihren Weg auch im Punkt A. Wie lang ist der kürzeste Weg der Teermaschine?

Geben Sie ein Beispiel für den kürzesten Weg und begründen Sie, warum dieser Weg am kürzesten ist.

Lösung:
Es gibt 24 Kanten der Länge b. Es gibt 8 Kreuzungen mit **ungeraden** Anzahl Kanten, die an diesen Kreuzungen zusammenkommen. Eine Kante muss an einer solchen Kreuzung zwei Mal durchgefahren werden. Da eine Kante zwei solche Kreuzungen verbindet, gibt es mindestens $8 : 2 = 4$ "überflüssige" Wege. Daraus folgt, dass die Länge des Weg mindestens $28b$ ist.



Ein Beispiel ist auf dem Bild rechts.

Aufgabe 5.6
Auf einem Kreis sind 21 Punkte markiert.
Man beweise, dass es unter den Kreisbögen mit Endpunkten in markierten Punkten mindestens 100 Bögen gibt, deren Winkelmass kleiner oder gleich 120° ist.
Lösung:
Induktion für $2n + 1$ Punkte und n^2 Bögen.
Basis: $n = 1$ – drei Punkte, es wird mindestens einen geben.
Induktionsschritt: Es seien $2n + 3$ Punkte gegeben. Wir wählen 2 Punkte A und B mit einem Bogen $>$120° (wenn es solche Punkte nicht gibt, haben wir genug kurze Bögen).

Es sei C einen der übrigen Punkten. Mindestens einen Bogen AC oder BC ist $\leq 120°$, also gibt es mindestens $2n + 1$ "kurze" Bögen mit Endpunkten A und B. Per Annahme haben wir mindestens n^2 andere "kurze" Bögen, also insgesamt $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ "kurze" Bögen.

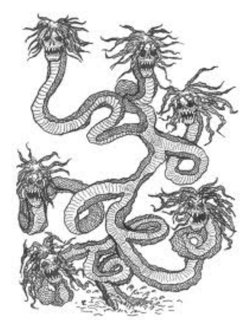
6 Aufgaben – Herausforderungen

Aufgabe 6.1
In einer Stadt kommen an jeder Kreuzung 3 Strassen zusammen. Die Strassen sind so mit drei Farben gefärbt, dass an jeder Kreuzung die Strassen mit verschiedenen Farben zusammen kommen.

Drei Strassen führen aus der Stadt hinaus. Man zeige, dass diese Strassen verschiedene Farben haben.
Lösung:
Wir teilen jede Strasse in 2 Halbstrassen und zählen sie. Wenn n die Anzahl Kreuzungen in der Stadt ist und c_i die Anzahl der "äusseren" Strassen mit der Farbe i, dann ist die Anzahl der Halbstrassen jeder Farbe beträgt $n + c_1$, $n + c_2$ und $n + c_3$. Alle diese Zahlen sind gerade, also haben c_1, c_2 und c_3 die gleiche Parität. Aus der Aufgabenstellung folgt, dass $c_1 + c_2 + c_3 = 3$. Dann gilt $c_1 = c_2 = c_3 = 1$.

Aufgabe 6.2

Eine Hydra hat viele Köpfe und Hälse, jeder Hals verbindet genau zwei Köpfe. Mit einem Schwertschlag kann Herkules alle Hälse durchtrennen, die aus einem Kopf A wachsen. Dafür wächst aus A zu jedem Kopf, mit dem A vorher nicht verbunden war, ein neuer Hals. Herkules tötet die Hydra, wenn er es schafft sie in zwei Teile zu trennen, die nicht mit einem Hals verbunden sind.



Bestimme die kleinste Zahl von N Schwertschlägen, mit denen Herkules jede 100-hälsige Hydra besiegen kann.

Lösung:
Wir betrachten ein Hydragraph mit Ecken-Köpfen und Kanten-Hälsen. Wir nennen ein Schlag auf alle Hälse, die von A wachsen A-*Inversion*.

1) Wenn für eine Ecke X $\deg X < 10$ gilt, invertieren wir alle Nachbarn von X und die Hydra ist tot, da X jetzt alleine ist.

2) Wenn eine Ecke Y mit allen Ecken ausser mit $n \leq 9$ verbunden ist, invertieren wir Y zuerst und dann alle ihre neue Nachbarn – Y ist alleine.

3) Wenn für jede Ecke Z $\deg Z \geq 11$ gilt und Z ist mit 10 anderen Ecke nicht verbunden, dann gibt es mindestens 22 Ecken und mindestens $22 \cdot 11 : 2 > 100$ Kanten.

Beispiel einer 100-hälsigen Hydra, die man mit 9 Schlägen nicht töten kann, wäre ein $K_{10,10}$ Graph, also eine Hydra mit 2 Gruppen mit je 10 Köpfen und 100 Hälse, die jeder Kopf aus einer Gruppe mit jedem Kopf aus der anderen Gruppe verbindet.

Ideen: Hals AB ändert sein Zustand nicht, wenn die Summe der Inversionen an A und B gerade ist, d.h. die Reihenfolge der Inversionen ist irrelevant und es macht keinen Sinn dieselbe Ecke doppelt zu invertieren.

Angenommen hat unsere Hydra 9 Schläge abbekommen. Dann in jeder Gruppe gibt es nicht invertierten Kopf. Also gibt es ein Hals aus einer Gruppe in die andere. Nicht invertierten Köpfe bilden eine zusammenhängende Menge.

Andererseits jeder nicht invertierter Kopf ist mit allen invertierten Köpfen in seiner Gruppe verbunden. Also wenn in jeder Gruppe mindestens einen Kopf invertiert ist, dann lebt Hydra noch. Wenn **alle** invertierten Köpfe in einer Gruppe sind, dann lebt sie auch, da jeder nicht invertierten Kopf in dieser Gruppe ist mit der anderen Gruppe verbunden und mit allen invertierten Köpfen.

Aufgabe 6.3
In einem Königreich gibt es 16 Städte. Der König möchte ein solches Strassennetz bauen, dass:
• man aus jeder Stadt jede andere Stadt über höchstens eine Stadt erreichen kann,
• nicht mehr als 5 Strassen aus jeder Stadt hinaus führen.

1) Man zeige, dass es möglich ist.
2) Man zeige, dass es nicht geht wenn man in der Aufgabenstellung die Zahl 5 durch 4 ersetzt.
Lösung:
1. Man betrachte ein vier dimensionalen Würfel (wie immer kodiert als 4-Folge aus 0 und 1). Seine Ecken sind Städte, die Strassen sind Kanten und Hauptdiagonalen. HMMMMM!!!!

2. Es gibt eine konstruktive aber sehr mühsame Lösung.

7 Aufgaben – Olympiaden

Moskau – , Schweiz – smo osm, Deutschland – , St. Petersburg/Russland –

Aufgabe 7.1

– 1973

In einer Stadt kann man von jeder U-Bahnstation jede andere U-Bahnstation erreichen. Beweisen Sie, dass man eine Station so für Reparaturarbeiten wählen kann, dass man von jeder anderen Station jede andere erreichen kann.

Aufgabe 7.2

– 2004

In einem Land gibt es 1001 Städte. Je zwei Städte sind mit einer **Einbahn**strasse verbunden. Aus jeder Stadt führen 500 Strassen hinaus und in jede Stadt führen 500 Strassen hinein. Nach einem Aufstand in diesem Land bildet sich eine unabhängige Republik mit 668 Städten.

Beweise, dass man aus jeder Stadt dieser Republik jede andere Stadt dieser Republik innerhalb dieser Republik erreichen kann.
Lösung:
Wir nehmen an, dass die Aussage nicht stimmt, d.h. eine Stadt Y in dieser Republik kann nicht von der Stadt X in dieser Republik erreichen werden.

Es sei A die Menge aller aus X erreichbaren Städte und B die (nicht leere, da $Y \in B$) Menge aller anderen Städte. Dann sind alle Städte so in zwei Gruppen aufgeteilt, dass alle Strassen von B zu A gerichtet sind.

Es sei weiter $|A| = a$ und $|B| = b$ und $a + b = 668$. O.b.d.A $a \geq 334 \geq b$. In B gibt es eine Stadt Z aus der mindestens $\frac{b-1}{2}$ Strassen nach B führen. Ausserdem führen a Strassen nach A.

Daraus folgt aus Z führen mindestens

$$a + \frac{b-1}{2} = \frac{a + (a+b) - 1}{2} = \frac{a + 667}{2} \geq \frac{1001}{2} > 500$$

Strassen hinaus. Widerspruch. Analog betrachtet man den Fall $b \geq a$.