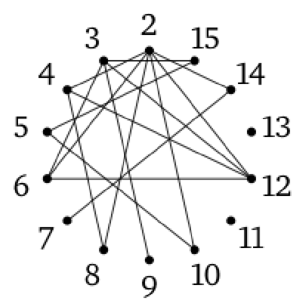
Von Kernideen zu Olympiaden
Graphentheorie

Dima Nikolenkov

23. April 2013

1 Kernidee

Was ist ein Graph? Ein einfacher Graph ist eine Menge von Punkten (Ecken), von denen einige durch Kanten verbunden sind.
Wann braucht man einen Graph? Jedes Mal, wenn wir in einer Menge von Elementen irgendwelche Beziehungen zwischen diesen Elementen haben. Die Art der Beziehung ist irrelevant. Relevant ist nur, ob zwei Elemente "verbunden" oder nicht "verbunden" sind. Diese Verbindung nennen wir weiterhin eine Kante.



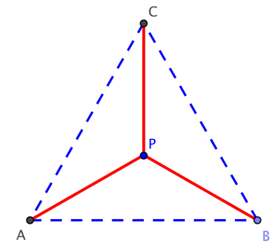
Bevor wir formale Definitionen anschauen, betrachten wir einige Aufgaben, wo die Graphen hilfreich sein können.

2 Einführende Aufgaben

Aufgabe 1 – Klassik Bekanntschaften.

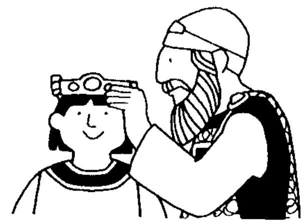
Gibt es in jeder Menge von sechs Personen drei, die sich paarweise kennen, oder drei, die sich paarweise nicht kennen?
Lösung:
Jede Person stellen wir als Punkt dar und jede Bekanntschaft als eine rote Verbindungsstrecke. Wenn zwei Personen sich nicht kennen verbinden wir sie mit einer blauen Kante.
Idee: Es gibt viele Kanten, also wird es irgendein gleichfarbiges Dreieck geben.

Formalisierung: Wir wählen eine Ecke P (Peter). Es gibt 5 weitere Personen, also gibt es nach dem Schubfachprinzip mindestens 3 gleichfarbige Kanten, die von P aus in die anderen Ecken laufen, z.B. rote. Betrachten wir das Dreieck aus den drei Enden dieser Kanten.
Sollte eine Kante auch rot sein, sind wir fertig. Sonst sind sie alle blau und wir sind auch fertig.



Aufgabe 2 Nachkommen.

König Grunz hatte drei Söhne. Unter seinen Nachkommen hatten 100 Personen 2 Söhne, die anderen starben kinderlos.



Wie viele Nachkommen hatte König Grunz?

Lösung:
Was ist die Beziehung hier? Offensichtlich Vater-Sohn. Also ordnen wir jeder Person eine Ecke zu und verbinden nur diejenigen, die in einer Beziehung Vater-Sohn sind. Diese Beziehung ist aber nicht symmetrisch, d.h. wir brauchen einen *orientierten* Graph. Wir zeichnen einen Pfeil von der Ecke Vater zur Ecke Sohn. Es ist auch sinnvoll diese Pfeile graphisch etagenweise (nach Generationen) darzustellen.

Jetzt übersetzen wir unsere Aufgabe in die Sprache der Graphentheorie.

Wir haben einen orientierten Graph mit unbekannter Anzahl Ecken. Von einer fixierten Ecke (König Grunz) gehen 3 Kanten aus und keine geht hinein. In jede andere Ecke geht eine Kante hinein (jeder Sohn hat einen Vater) und gehen entweder genau 2 oder keine Kanten heraus. Dabei gibt es 100 Ecken aus denen genau 2 Kanten herausgehen. Gesucht ist die Anzahl Ecken.

Berechnen wir die Anzahl Kanten. Es gibt $3 + 100 \cdot 2 = 203$ Kanten. Jede Kante geht genau in eine Ecke hinein, also gibt es auch 203 Ecken.

Aufgabe 3 Volleyballturnier.
In einem Turnier spielen n Mannschaften. Jede Mannschaft spielt gegen jede andere genau einmal.

Beweise, dass man die Mannschaften so durchnummerieren kann, dass für jedes $1 \leq i \leq n-1$ die Mannschaft mit der Nummer $i+1$ gegen die Mannschaft mit der Nummer i gewonnen hat.
Lösung:
Wie so oft bei den konstruktiven Aufgaben im Bereich der Graphentheorie, wenden wir die vollständige Induktion an.

Basis (Verankerung): für $n = 1$ und $n = 2$ ist die gewünschte Nummerierung klar.

Induktionsschritt: Angenommen, die gewünschte Nummerierung für n Mannschaften ist vorhanden.

Wir betrachten ein Turnier mit $n+1$ Mannschaften. Die ersten n kann man durchnummerieren wie gewünscht per Annahme. Falls die $(n+1)$-te Mannschaft A gegen alle gewonnen hat, bekommt sie die Nummer $n+1$. Sonst wählen wir die Mannschaft mit der kleinsten Nummer m unter denen, die gegen A gewonnen haben. Wir stellen die Mannschaft A in unserer Liste **direkt** vor die Mannschaft m.

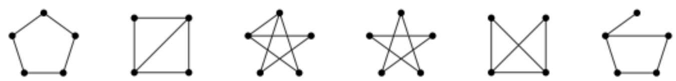
3 Definitionen und Fakten

Definition 1 *Ein einfacher Graph $G = (V, E)$ besteht aus Knoten (Ecken) V und Kanten (Bögen) E, die jeweils zwei Knoten verbinden.*

Eine Multikante *besteht zwischen zwei Knoten u und v, wenn nicht nur eine Kante, sondern mehrere Kanten zwischen ihnen liegen.*

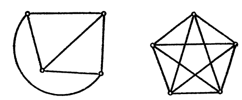
Eine Schlinge *ist eine Kante mit dem gleichen Anfangs- und Endknoten.*

Ein **einfacher** *Graph besitzt keine Multikanten und Schlingen.*



Einige Graphen besitzen spezielle Namen – hier ist eine Sammlung der Definitionen.

Definition 2 *Ein Graph ist vollständig, wenn er alle möglichen Kanten enthält.*
Er wird mit K_n bezeichnet und hat $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten.

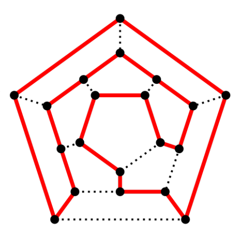


Definition 3 *Ein* Kantenzug *in G ist eine Folge $W = v_0, v_1, \ldots, v_k$ von Knoten. Wenn die Kanten von W alle verschieden sind, dann ist W ein* **Weg**.

Wenn die Knoten alle verschieden sind, dann ist W ein Pfad *(oder einfacher Weg).*

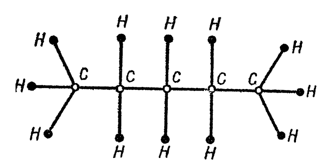
Die Länge von W ist gleich der Anzahl von Kanten von W, also k. Ein Kreis *ist ein geschlossener ($v_0 = v_k$) Kantenzug.*

Ein **Zyklus** *ist ein geschlossener Pfad.*
Ein Eulerkreis *in einem Graphen G ist ein geschlossener Kantenzug, der jede Kante aus G genau einmal benutzt (siehe z.B. 2-regulärer Stern).*
Ein Hamiltonkreis *ist ein geschlossener Pfad in einem Graphen, der jeden Knoten genau einmal enthält.*

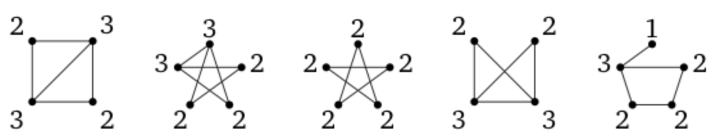


Definition 4 *Baüme, Wälder, Blätter und Wurzeln.*

Ein Graph, der keinen Kreis besitzt, ist ein Wald.
Ein zusammenhängender Wald ist ein Baum.
Ein Knoten, der in einem Wald Grad 1 hat, ist ein Blatt.
Wenn man in einem Baum einen Knoten auswählt, heisst dieser Wurzel.



Definition 5 Grad *einer Ecke ist die Anzahl Kanten, die mit dieser Ecke verbunden sind. Ein Graph heisst k-regulär, wenn jede Ecke derselben Grad k hat (Stern ist 2-regulär).*



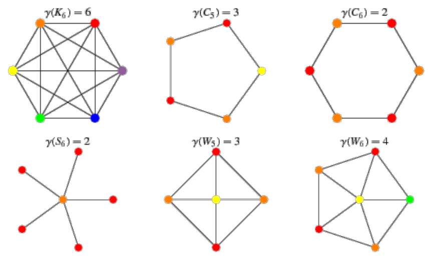
Satz 1 *Die Summe der Grade aller Ecken eines einfachen Graphen ist gleich der verdoppelten Anzahl der Kanten.*
Beweis: Doppelt zählen der Paare (Kante, Ecke aus der diese Kante läuft). □

Korollar 1 *Paritäten:*
a) Die Anzahl der Ecken ungeraden Grades ist immer gerade.
b) Ist ein Graph k-regulär, dann muss entweder k oder die Anzahl Ecken gerade sein.

Satz 2 *In einem Graph mit mindestens zwei Ecken gibt es zwei Ecken desselben Grades.*
Beweis: Indirekter Beweis mit dem Schubfachprinzip. □

Definition 6 *Färbungsprobleme, chromatische Zahl.*

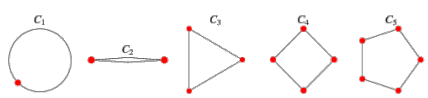
Wie im Beispiel eins gesehen ist es von Zeit zu Zeit sinnvoll die Graphen zu färben.

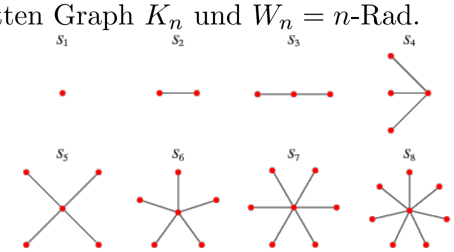


Chromatische Zahl $\gamma(G)$ *eines Graphen G ist die minimale Anzahl Farben, die man braucht um die Ecken zu so zu färben, dass keine zwei verbundene Ecken dieselbe Farbe haben.*

Um diesen Begriff besser zu verstehen bestimme die chromatische Zahlen der untenstehenden oft vorkommenden Graphen:

$C_n = n$-Zyklus, $S_n = n$-Stern, kompletten Graph K_n und $W_n = n$-Rad.



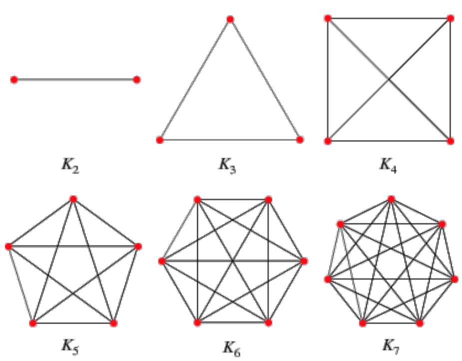


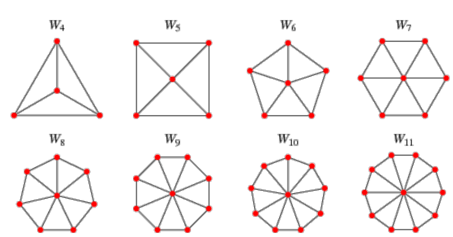
$\gamma(C_3) =$, $\gamma(C_4) =$

Allgemein: $\gamma(C_n) =$

$\gamma(S_3) =$, $\gamma(S_4) =$,

Allgemein: $\gamma(S_n) =$





$\gamma(K_3) =$, $\gamma(K_4) =$

Allgemein: $\gamma(K_n) =$

$\gamma(W_3) =$, $\gamma(W_4) =$,

Allgemein: $\gamma(W_n) =$

4 Aufgaben – Niveau 1

Aufgabe 4.1
In einem bestimmten Königreich gibt es 100 Städte, und aus jeder Stadt führen genau 4 Strassen hinaus. Wieviele Strassen gibt es in diesem Königreich?

Aufgabe 4.2
In einem Ziegenstall leben zwei Ziegenarten - Kreti und Pleti. Jedes Kreti ist mit 6 Kretis und 9 Pletis befreundet. Jedes Pleti ist mit 10 Kretis und 7 Pletis befreundet.

Von welcher Arten Ziegen gibt es mehr im Ziegenstall?

Aufgabe 4.3
Man zeige, dass es keinen einfachen Graph mit 5 Ecken, deren Grade die Werte 4, 4, 4, 4 und 2 haben, gibt.

Aufgabe 4.4
In einer Klasse sind 20 Schülerinnen. Jede ist mit mindestens 14 anderen befreundet. Kann man behaupten, dass es 4 Schülerinnen gibt, die paarweise befreundet sind?

Reduktion des Graphen

Aufgabe 4.5
a) Beweisen Sie, dass man die Kanten eines Würfels mit den Zahlen $1, 2, \ldots 11, 12$ nicht so durchnummerieren kann, dass die Summen der Zahlen auf den von einer Ecke ausgehenden Kanten immer gleich sind.

b) Kann man eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 12, 13$ entfernen und mit den restlichen Zahlen die Kanten des Würfels so anschreiben?

Aufgabe 4.6
20 Computer sind mit Netzwerkkabeln verbunden. Jedes Kabel verbindet zwei Computer, jedes Computerpaar ist mit höchstens einem Kabel verbunden und von jedem Computer gehen höchstens 2 Kabel weg.

Man möchte die Kabel so färben, dass von jedem Computer verschiedenfarbige Kabel ausgehen. Welches ist die minimale Anzahl Farben, die dazu benötigt werden?

Konstruktion Moskau 1988

5 Aufgaben – Niveau 2

Aufgabe 5.1

1. Ein Stück Draht ist 120 cm lang. Kann man es biegen, um einen Würfel zu formen, dessen Kanten 10 cm lang sind?
2. Welches ist die kleinste Zahl von Schnitten, die man machen muss, um den verlangten Würfel zu erhalten?

Aufgabe 5.2
In einer Ohrfeigenrunde sitzen 15 Teilnehmer. Jeder Teilnehmer hat genau k andere Teilnehmer geohrfeigt. Für welche kleinste Zahl k kann man behaupten, dass es zwei Teilnehmer gibt, die sich gegenseitig geohrfeigt haben?

Aufgabe 5.3
Man bestimme die grösstmögliche Anzahl Kanten in einem Graph mit n Ecken mit folgender Eigenschaft:
Unter drei beliebigen Ecken gibt es zwei, die nicht mit einer Kante verbunden sind.

Aufgabe 5.4
Im dreidimensionalen Raum werden 9 Punkte gewählt. Keine 3 liegen auf einer Geraden. Jeder Punkt ist mit genau 4 anderen mit einer geraden Kante verbunden.

Man beweise, dass es mindestens ein Dreieck mit Ecken in diesen Punkten gibt.

Aufgabe 5.5
Ein Dorf ist gebaut in der Form eines 3×3 Quadrates. Man möchte alle Strassen im Dorf teeren. Die Teermaschine fährt in der linken unteren Ecke A des Quadrates los und beendet ihren Weg auch im Punkt A. Wie lang ist der kürzeste Weg der Teermaschine?

Geben Sie ein Beispiel für den kürzesten Weg und begründen Sie, warum dieser Weg am kürzesten ist.

Aufgabe 5.6
Auf einem Kreis sind 21 Punkte markiert.
Man beweise, dass es unter den Kreisbögen mit Endpunkten in markierten Punkten mindestens 100 Bögen gibt, deren Winkelmass kleiner oder gleich 120° ist.

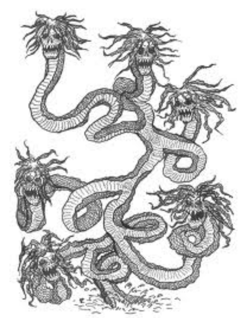
6 Aufgaben – Herausforderungen

Aufgabe 6.1
In einer Stadt kommen an jeder Kreuzung 3 Strassen zusammen. Die Strassen sind so mit drei Farben gefärbt, dass an jeder Kreuzung die Strassen mit verschiedenen Farben zusammen kommen.

Drei Strassen führen aus der Stadt hinaus. Man zeige, dass diese Strassen verschiedene Farben haben.

Aufgabe 6.2

Eine Hydra hat viele Köpfe und Hälse, jeder Hals verbindet genau zwei Köpfe. Mit einem Schwertschlag kann Herkules alle Hälse durchtrennen, die aus einem Kopf A wachsen. Dafür wächst aus A zu jedem Kopf, mit dem A vorher nicht verbunden war, ein neuer Hals. Herkules tötet die Hydra, wenn er es schafft sie in zwei Teile zu trennen, die nicht mit einem Hals verbunden sind.



Bestimme die kleinste Zahl von N Schwertschlägen, mit denen Herkules jede 100-hälsige Hydra besiegen kann.

Aufgabe 6.3
In einem Königreich gibt es 16 Städte. Der König möchte ein solches Strassennetz bauen, dass:
- man aus jeder Stadt jede andere Stadt über höchstens eine Stadt erreichen kann,
- nicht mehr als 5 Strassen aus jeder Stadt hinaus führen.

1) Man zeige, dass es möglich ist.
2) Man zeige, dass es nicht geht wenn man in der Aufgabenstellung die Zahl 5 durch 4 ersetzt.

7 Aufgaben – Olympiaden

Moskau – , Schweiz – , Deutschland – , St. Petersburg/Russland –

Aufgabe 7.1

– 1973

In einer Stadt kann man von jeder U-Bahnstation jede andere U-Bahnstation erreichen. Beweisen Sie, dass man eine Station so für Reparaturarbeiten wählen kann, dass man von jeder anderen Station jede andere erreichen kann.

Aufgabe 7.2

– 2004

In einem Land gibt es 1001 Städte. Je zwei Städte sind mit einer **Einbahn**strasse verbunden. Aus jeder Stadt führen 500 Strassen hinaus und in jede Stadt führen 500 Strassen hinein. Nach einem Aufstand in diesem Land bildet sich eine unabhängige Republik mit 668 Städten.

Beweise, dass man aus jeder Stadt dieser Republik jede andere Stadt dieser Republik innerhalb dieser Republik erreichen kann.