# Tipps Geometrie II

Aktualisiert: 3. Februar 2018
vers. 2.0.1

## Ähnliche Dreiecke

**1.** Zweimal Strahlensatz beim Scheitelpunkt $A$ ergibt $DB = 15$.

**2.** Wende zweimal den zweiten Strahlensatz an, einmal beim Scheitelpunkt $B$, einmal beim Scheitelpunkt $C$.

**3.** Zeige mit Winkeljagd, dass die beiden Dreiecke $PRQ$ und $PQS$ ähnlich sind. Du brauchst dazu die Sehnenvierecke $PRAQ$ und $PQBS$.

**4.** (IMO 1990/1) Schau dir Beispiel 4 im Geometrie I - Skript an. Weitere Winkeljagd an dieser Figur liefert zwei Paare von ähnlichen Dreiecken. Eines ist z.B. $\triangle PAD \sim \triangle ECB$. Kombiniert man alles zusammen, bekommt man

$$\frac{EG}{EF} = \frac{PA}{PB} = \frac{q}{1-q}.$$

## Working Backward

**1.** Verschiebe die Strecke $DA$ um den Vektor $\overrightarrow{DC}$ und definiere einen Punkt $B'$ auf $BC$ mit $CB' = s$. Wenn du jetzt zeigen kannst, dass $\angle CB'A = 80°$ gilt, bist du fertig (da der Ortsbogen für $80°$ über der Strecke $AC$ die Gerade $BC$ neben $C$ nur noch in einem weiteren Punkt schneiden kann).

**2.** (Slo 2005/III/3) Starte mit einem gleichseitigen Dreieck entweder über ähnliche Dreicke oder indem du die Steigungen der Geraden berechnest, kannst du zeigen, dass $BF$ und $AE$ senkrecht aufeinander stehen. Verschiebe nun $A$ entlang der Senkrechten zu $BC$. Wie ändert sich dabei der Winkel zwischen den beiden Geraden?

**3.** (SMO 2004/9) Nach Voraussetzung gibt es einen Punkt $P$ auf $BC$ mit $BP = BA$ und $CP = CD$. Definiere dann den Punkt $W$ als Schnittpunkt von $BC$ mit der Winkelhalbierenden von $\angle BAD$ und beweise, dass $W$ auf der Winkelhalbierenden von $\angle CDA$ liegt.

**4.** Die Vermutung, auf die man hier erst kommen muss, ist, dass der Berührungspunkt auch auf der Geraden $CD$ liegt. Definiere also $S$ als Schnittpunkt von $CD$ und dem Kreis mit Durchmesser $AB$. Beweise nun erstens, dass die Punkte $P, Q$ und $S$ auf einer Geraden liegen und zweitens $\angle QSD = \angle SBA$. Dies impliziert, dass $PQ$ tangential am Kreis mit Durchmesser $AB$ liegt. Wie so oft solltest du auf Sehnenvierecke zu achten!

## Die Potenz eines Punktes

**1.** Versuche, die Potenzen an $k$ durch den Kreisradius und die Abstände auszudrücken.

**2.** In der Aufgabenstellung kommt das Produkt $AB \cdot AD$ vor. Sieht aus wie eine Potenz, aber zu welchem Kreis? Eine gute Wahl ist der Umkreis von $\triangle DBH_a$. Auf diesem Kreis liegt auch der

Schnittpunkt von $PD$ und $AH_a$, nennen wir ihn $R$. Weiter sei $S$ der Schnittpunkt von $PE$ mit $AH_a$. Mit dem Potenzsatz am Punkt $A$ vereinfacht sich die Aufgabe auf eine Aussage über das Dreieck $PRS$.

**3.** Nach AM-GM ist die Summe von zwei Zahlen bei konstantem Produkt dann am kleinsten, wenn die beiden Zahlen gleich gross sind.

**4.** Die Gerade $EF$ schneidet $AB$ rechtwinklig. Benutze dann ähnliche Dreiecke, um einen Zusammenhang zwischen den Punkten $E$ und $F$ herzustellen, z.B. eine Gleichung mit $HE$ und $HF$ und kombiniere das dann mit der Potenz von $H$.

## Die Potenzlinie

**1.** Nimm den Schnittpunkt von zwei Potenzlinien (falls dieser existiert). Die Potenz dieses Punktes zu allen drei Kreisen ist gleich gross, er liegt also auch auf der dritten Potenzlinie.

**2.** Zeige, dass der Höhenschnittpunkt $H$ auf der Potenzlinie der beiden gegebenen Kreise liegt. Daraus folgt eine Gleichung mit gerichteten Strecken und dann mit der Umkehrung des Potenzsatzes das Gewünschte.

**3.** $D$ und $H$ liegen beide auf der Potenzlinie der Umkreise von $\triangle DEH$ und $\triangle ABH$. Zu zeigen bleibt so noch, dass die Verbindungslinie der Mittelpunkte dieser beiden Kreise parallel zu $CM$ ist.

## Die Simson-Gerade

**1.** Auf die verschiedenen Fälle musst du hier ausnahmsweise nicht eingehen. Beweise den Satz einfach für einen Fall. Betrachte dazu den Winkel zwischen den Simson-Geraden als Aussenwinkel eines Dreiecks, das noch von einer Seite des Dreiecks $ABC$ begrenzt wird. Der Winkel lässt sich so aufteilen. Mit Winkeljagd über die vielen Sehnenvierecke lässt sich das Gewünschte dann zeigen.

**2.** (IMO 2003/4) Die Voraussetzung mit den Winkelhalbierenden brauchst du nur in dieser Form

$$\frac{AB}{CB} = \frac{DA}{DC}$$

in der Skizze zeichnest du sie am besten gar nicht ein. Mache Winkeljagd mit drei Winkeln des Sehnenvierecks und beachte, dass $P, Q, R$ auf einer Geraden liegen. Du findest dann zwei Paare von ähnlichen Dreiecken

$$\triangle DPR \sim \triangle DBC \qquad \triangle DQR \sim \triangle DBA$$

## Ceva und Menelaos

**1.**

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1.$$

**2.** Versuche $\frac{AP}{PC}$ zu finden. Dies gelingt, indem du Ceva und Menelaos im Dreieck $ACD$ anwendest.

3. Sei $S$ der Schnittpunkt von $MQ, NP$ und $BD$ und $X$ der Schnittpunkt von $AC$ und $PQ$. Das Vorgehen ist nun ähnlich wie beim Beweis von Desargues im Skript. Wir wollen mit Menelaos zeigen, dass $M, N$ und $X$ auf einer Geraden liegen, d.h.

$$\frac{AM}{MB}\frac{BN}{NC}\frac{CX}{XA} = -1.$$

Den ersten Faktor finden wir beim Menelaos in $\triangle ABD$, den zweiten in $\triangle BCD$ und den dritten in $\triangle ACD$. Multiplizieren, fertig. Die Umkehrung folgt aus der Symmetrie.

4. Benütze zwei Mal Menelaos im Dreieck $GHI$ und vergleiche die Faktoren der beiden Gleichungen einzeln miteinander.

## Spezielle Punkte im Dreieck

### Der Schwerpunkt

1. Sei $S$ der Schwerpunkt und nehme an $BM_b = CM_c$, wobei $M_b$ und $M_c$ die Mittelpunkte der Seiten $CA$ bzw. $AB$ seien. Zeige als erstes, dass $\triangle BCS$ gleichschenklig ist und dann dass die Dreiecke $BCM_b$ und $CBM_c$ kongruent sind.

2. Von $C$ auf $S$ kommt man durch eine zentrische Streckung am Mittelpunkt der Strecke $AB$ mit dem Faktor $\frac{1}{3}$. Da dieser Mittelpunkt fest bleibt, ist der geometrische Ort von $S$ ebenfalls ein Kreis.

### Der Inkreismittelpunkt und die Ankreismittelpunkte

1. Zeichne den Inkreismittelpunkt und die Verbindungen zu den Eckpunkten ein. Dies unterteilt das Dreieck in drei kleinere Dreiecke. Untersuche die Flächeninhalte dieser kleineren Dreiecke.

2. Zeige, dass $AC'IB'$ ein Sehnenviereck ist.

3. (Slo 2005/I/3) Zuerst die Standard-Substitution: $AB = x + y$, $BC = y + z$, $CA = z + x$. Die Nebenbedingung vereinfacht sich dadurch etwas, bleibt aber seltsam. Versuche nun etwas zu konstruieren, wo man die Nebenbedingung direkt verwenden kann. Probiere zuerst selber eine Weile, wenn du nicht draufkommst, hier eine Möglichkeit: Sei $P$ der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite $AB$ und $A'$ die Spiegelung von $A$ an $P$. Die Nebenbedingung bedeutet, dass $\triangle A'BI$ gleichschenklig ist! Für das gesuchte Verhältnis bekommt man dann 2.

4. (Bulgarien 1997) Es ist hier naheliegend die beiden Kreise mit Durchmesser $AB$ und $CH$ einzuzeichnen. Sei $S$ der Schnittpunkt von $MK$ und dem Kreis mit Durchmesser $AB$. Dass $AS$ die Winkelhalbierende von $\angle CAH$ ist, zeigt man am einfachsten mit Hilfe von Punkt i. aus dem Skript.

### Der Umkreismittelpunkt und der Höhenschnittpunkt

1. $AH_a$ ist die Winkelhalbierende von $\angle H_bH_aH_c$. Betrachte die Sehnenvierecke $BH_aHH_c$ und $CH_aHH_b$.

2. (BW 96/3) Konstruiere der Reihe nach geometrische Orte, welche die Punkte $P$ und $Q$ festsetzen. Daraus findet man zwei Möglichkeiten, entweder $PQ = 2 \cdot \sin 15° = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$ oder $PQ = 2 \cdot \sin 75° = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)$.

**3.** Versuche, die drei Geraden $BB'$, $CC'$ und $HH'$ als Potenzlinien geeigneter Kreise zu interpretieren.

### Tangentenvierecke

**1.** (Iran 2001) Beide Gleichungen sind äquivalent damit, dass ein Kreis existiert, der die Geraden $AB$, $AD$, $CD$ und $BE$ berührt. Genauer: Der Ankreis von $\triangle ACD$ gegenüber $A$ berühre $AC$ in $P$, $AD$ in $Q$ und $CD$ in $R$. Nehme nun an, dass dieser Kreis auch $BE$ in einem Punkt $S$ berühre und verwende die daraus folgenden Gleichungen, um die beiden Gleichungen in der Aufgabenstellung zu zeigen. Die Gleichungen sind

$$AP = AQ \qquad BP = BS \quad DQ = DR \qquad CP = CR \quad EQ = ES \qquad FR = FS$$

**2.** (IMO 1962/5) Es gibt viele Möglichkeiten den Punkt $D$ zu konstruieren, aber ich glaube alle brauchen einen Hilfspunkt (den Inkreismittelpunkt oder so). Nimm beispielsweise die Differenz von zwei benachbarten Seiten, die Differenz der beiden anderen Seiten ist dann gleich gross und du kannst das verwenden, um einen Kreis bei $A$ zu konstruieren. Für den Schnittpunkt dieses Kreises mit $AD$ gilt

$$\angle APC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC.$$

Den Punkt $P$ kannst du also mit Hilfe des richtigen Kreises (Ortsbogen) über der Strecke $AC$ konstruieren.

## 1 Weitere Aufgaben

**1.** Es gilt

$$\frac{TP}{AP} = \frac{[BCT]}{[BCA]}.$$

**2.** Verwende die Potenz am Schnittpunkt von $MN$ und $PQ$. Zeige damit, dass die Höhe von $\triangle MNP$ durch $P$ gleich lang ist wie die Höhe von $\triangle MNQ$ durch $Q$.

**3.** Bezeichne zum Beispiel $\angle CAB \doteq \alpha$, $\angle BAD \doteq \beta$ und $\angle ADB \doteq \epsilon$. Wenn du nun zeigen kannst, dass $\angle KBA = \epsilon$ gilt, bist du fertig. Dies gelingt über die Sehnenvierecke $ADMC$ und $AKBS$, wenn $S$ der Schnittpunkt von $CD$ und $AM$ ist.

**4.** Diese Aufgabe funktioniert gleich wie der Beweis des Potenzsatzes. Finde hier zwei Paare von ähnlichen Dreiecken, welche die angegebenen Strecken enthalten, und kombiniere die so erhaltenen Verhältnisse.

**5.** (CH 98/5) Sei $S$ der Schnittpunkt der beiden Tangenten. Wende nun Menelaos im Dreieck $SPQ$ an.

**6.** Nach Vorraussetzung gilt $\angle ALP = \angle APL$ und

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AK}{AP}.$$

Daraus folgt $\angle APK = \angle ABP$ und dann $\angle KPL = \angle LPB$.

**7.** Betrachte die drei Kreise mit Mittelpunkten $D, E$ bzw. $F$ und Radien $DC, EA$ bzw $FB$. Die drei gegebenen Rechtwinkligen sind nun gerade die Potenzlinien dieser Kreise und diese schneiden sich bekanntlich in einem Punkt.

**8.** (USAMO 1994/3) Mache mal Winkeljagd, z.B. mit $\angle ACB \doteq \alpha$, $\angle BAC \doteq \beta$ und $\angle DCE \doteq \gamma$. Du findest dann zwei Paare von ähnlichen Dreiecken (sei $S$ der Schnittpunkt von $AD, BE$ und $CF$)

$$\triangle ACP \sim \triangle BEF \qquad \triangle ACE \sim \triangle FES$$

Was danach noch bleibt, folgt daraus, dass $AD$ und $BC$ parallel sind. ($ABCD$, $CDEF$ und $EFAB$ sind alles gleichschenklige Trapeze.)