Aufgaben Geometrie II

Aktualisiert: 4. Februar 2017
vers. 2.1.0

Ähnliche Dreiecke

1. In $\triangle ABC$ sei D ein beliebiger Punkt auf der Strecke AB. Sei E der Schnittpunkt von AC mit der Parallelen von BC durch D und F sei der Schnittpunkt von AB mit der Parallelen von CD durch E. Wie lang ist DB, wenn $AF = 4$ und $FD = 6$ bekannt sind?

2. Der Punkt Z liege auf der Seite BC des Dreiecks $\triangle ABC$. Sei X der Schnittpunkt der Geraden AC mit der Parallelen von AZ durch B und Y sei der Schnittpunkt der Geraden AB mit der Parallelen von AZ durch C. Zeige

$$\frac{1}{AZ} = \frac{1}{BX} + \frac{1}{CY}.$$

3. Sei AB eine Sehne im Kreis k und P ein weiterer Punkt auf k. Sei Q die Projektion von P auf die Gerade AB und seien R und S die Projektionen von P auf die Tangenten an k durch A bzw. B. Zeige, dass PQ das geometrische Mittel von PR und PS ist.

4. Die beiden Sehnen AB und CD schneiden sich innerhalb des Kreises in E. Sei P ein beliebiger Punkt auf der Strecke BE. Die Tangente t durch E an den Kreis durch D, P und E schneide die Geraden BC und AC in F bzw. G. Sei $q = \frac{AP}{AB}$, finde $\frac{EG}{EF}$ als Funktion von q (Ein Ansatz findest du bei Beispiel 4 (S. 6) im Geometrie I - Skript).

Working Backward

1. Sei $ABCD$ ein Viereck mit $CD = DA \doteq s$. Alle Winkel des Vierecks seien bekannt:

$$\angle DAB = 40^\circ \quad \angle ABC = 80^\circ \quad \angle BCD = 80^\circ \quad \angle CDA = 160^\circ$$

Zeige $BC = s$.

2. Gegeben ein gleichschenkliges Dreieck mit Scheitelpunkt A. Sei D der Mittelpunkt der Seite AC und sei E die Projektion von D auf BC. Der Mittelpunkt von DE sei F. Zeige, dass die Geraden BF und AE genau dann senkrecht aufeinander stehen (und nur dann), wenn $\triangle ABC$ gleichseitig ist.

3. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, sodass gilt $AB + CD = BC$. Zeige, dass der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle DAB$ und $\angle CDA$ auf der Seite BC zu liegen kommt.

4. Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten A und B. Eine Gerade durch A treffe die Kreise nochmals in den Punkten C und D. Seien P und Q die Projektionen von B auf die Tangenten bei C bzw. D. Zeige, dass die Gerade PQ tangential zum Kreis mit Durchmesser AB liegt.

Die Potenz eines Punktes

1. Seien k ein Kreis und A, B zwei Punkte mit derselben (gerichteten) Potenz an k. Zeige, dass dann A und B den gleichen Abstand zum Mittelpunkt von k haben.

2. Sei P ein beliebiger Punkt im Innern des spitzwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ und H_a der Höhenfusspunkt der Höhe durch A. Die Punkte D, E, Q seien die Projektionen von P auf AB, AC bzw. AH_a. Zeige
$$|AB \cdot AD - AC \cdot AE| = BC \cdot PQ.$$

3. Sei g eine beliebige Gerade und A und B zwei Punkte auf verschiedenen Seiten von g. Ein Kreis k durch A und B schneide g in den Punkten P und Q. Für welchen solchen Kreis $k_{\min}$ ist die Strecke PQ minimal?

4. Das konvexe Viereck $ABCD$ sei einem Halbkreis s mit Durchmesser AB einbeschrieben. Die Geraden AC und BD schneiden sich in E und AD schneide BC in F. Die Gerade EF schneide s in G und AB in H. Zeige, dass E dann und nur dann Mittelpunkt der Strecke GH ist, wenn G Mittelpunkt der Strecke FH ist.

Die Potenzlinie

1. Gegeben seien drei Kreise und die Potenzlinien zu je zwei von ihnen. Zeige, dass sich diese drei Geraden entweder in einem Punkt schneiden oder parallel sind.

2. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. M und N seien zwei beliebige Punkte auf den Seiten AB bzw. AC. Die Kreise mit den Durchmessern BN und CM schneiden sich in den Punkten P und Q. Zeige, dass die Punkte P, Q und der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC auf einer Geraden liegen.

3. Seien AD und BE Höhen im Dreieck ABC. Es gelte $CA \neq CB$. Sei M der Mittelpunkt der Seite AB, H der Höhenschnittpunkt von $\triangle ABC$ und F der Schnittpunkt von AB und DE. Zeige $FH \perp CM$.

Die Simson-Gerade

1. Seien A, B, C, P, Q fünf Punkte auf einem Kreis. Zeige, dass sich die beiden Simson-Geraden von P und Q bezüglich $\triangle ABC$ in einem Winkel schneiden, der gleich gross ist wie der Peripheriewinkel über der Sehne PQ.

2. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck. Die Projektionen von D auf die Geraden AB, BC und CA seien P, Q bzw. R. Die Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ und $\angle CDA$ schneiden sich auf AC. Zeige $RP = RQ$.

Ceva und Menelaos

1. Im Dreieck ABC seien D, E, F die Berührungspunkte des Inkreises auf BC, CA bzw. AB. Zeige, dass sich die Geraden AD, BE, CF in einem Punkt schneiden.

2. Seien A, B, C drei Punkte auf einer Geraden. Wähle in der Ebene einen beliebigen Punkt D und einen weiteren Punkt E auf DB. Zeige, dass der Schnittpunkt P von AC mit der Geraden durch $AE \cap CD$ und $CE \cap AD$ nur von A, B und C abhängt.

3. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck und seien M, N, P, Q Punkte auf AB, BC, CD bzw. DA. Zeige, dass sich MQ, NP, BD genau dann in einem Punkt schneiden, wenn sich MN, PQ, AC in einem Punkt schneiden.

4. Seien A, B, C kollineare Punkte und D, E, F kollineare Punkte. Seien $G = BE \cap CF$, $H = AD \cap CF$ und $I = AD \cap BE$. Es gelte $AI = HD$ und $CH = GF$, beweise $BI = GE$.

Spezielle Punkte im Dreieck

Der Schwerpunkt

1. In einem Dreieck sind zwei Schwerlinien gleich lang. Zeige, dass es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt.

2. Gegeben ein Dreieck ABC mit Schwerpunkt S. Finde den geometrischen Ort von S, wenn man C auf dem Umkreis von $\triangle ABC$ verschiebt.

Der Inkreismittelpunkt und die Ankreismittelpunkte

1. Sei ABC ein Dreieck mit Fläche A, Umfang U und Inkreisradius r. Zeige, dass $2A = r \cdot U$ gilt.

2. Im Dreieck ABC sei $\angle BAC = 60°$. Sei I der Inkreismittelpunkt und seien B', C' die Schnittpunkte von BI bzw. CI mit AC bzw. AB. Zeige $IB' = IC'$.

3. Sei I der Inkreismittelpunkt von $\triangle ABC$, in dem $CA + AI = BC$ gilt. Finde das Verhältnis der Winkelgrössen von $\angle BAC$ und $\angle CBA$.

4. Im $\triangle ABC$ sei H der Höhenschnittpunkt. Die Punkte M und K seien die Mittelpunkte der Strecken AB bzw. CH. Zeige, dass sich die beiden Winkelhalbierenden von $\angle CAH$ und $\angle CBH$ auf der Geraden MK schneiden.

Der Umkreismittelpunkt und der Höhenschnittpunkt

1. Seien H_a, H_b, H_c die Höhenfusspunkte von $\triangle ABC$. Zeige, dass der Höhenschnittpunkt H der Inkreismittelpunkt von $\triangle H_aH_bH_c$ ist.

2. Sei $ABCD$ ein Einheitsquadrat und seien P und Q Punkte in der Ebene, sodass Q der Umkreismittelpunkt von $\triangle BPC$ und D der Umkreismittelpunkt von $\triangle PQA$ sind. Finde alle möglichen Werte für die Länge der Strecke PQ.

3. Sei ABC ein Dreieck. Ein beliebiger Kreis durch B und C schneide die Seiten AB und AC nochmals in C' bzw. B'. Seien H und H' die Höhenschnittpunkte der Dreiecke ABC bzw. $AB'C'$. Zeige, dass sich die Geraden BB', CC' und HH' in einem Punkt schneiden.

Tangentenvierecke

1. Seien B und D zwei Punkte auf den Seiten AC bzw. AE des Dreiecks ACE. Der Schnittpunkt von CD und BE sei F. Zeige, falls $AB + BF = AD + DF$, dann $AC + CF = AE + EF$.

2. Gegeben drei Punkte A, B, C auf einem Kreis k. Konstruiere den Punkt D auf k, sodass $ABCD$ einen Inkreis hat.

Weitere Aufgaben

1. Sei ABC ein Dreieck und seien P, Q, R Punkte auf BC, CA bzw. AB, so dass sich AP, BQ und CR im Punkt T schneiden. Zeige

$$\frac{TP}{AP} + \frac{TQ}{BQ} + \frac{TR}{CR} = 1.$$

2. Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten M und N. Eine der beiden gemeinsamen Tangenten an die beiden Kreise berühre den ersten Kreis in P und den zweiten in Q. Zeige, dass die Dreiecke MNP und MNQ denselben Flächeninhalt haben.

3. Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in A und B. Eine beliebige Gerade durch B schneide k_1 und k_2 nochmals in den Punkten C, respektive D. Die beiden Tangenten bei C und D schneiden sich in M. Sei K der Schnittpunkt von AC mit der Parallelen von CM durch den Schnittpunkt von CD und AM. Zeige, dass BK tangential an k_2 liegt.

4. Sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck und P der Schnittpunkt von AB und CD. Zeige

$$\frac{AC \cdot AD}{BC \cdot BD} = \frac{AP}{BP}.$$

5. Es sei k ein Kreis und A, B seien zwei Punkte auf k. In diesen Punkten werden die Tangenten an k gezeichnet und im gleichen Umlaufsinn die gleich langen Tangentenabschnitte AP und BQ abgetragen. Beweise, dass die Strecke PQ von der Geraden AB halbiert wird.

6. Auf der Strecke AB liegen die Punkte K und L, so dass gilt $AL^2 = AK \cdot AB$. P sei ein beliebiger Punkt in der Ebene mit $AP = AL$. Zeige, dass PL die Winkelhalbierende von $\angle KPB$ ist.

7. Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Zeichne die gleichschenkligen Dreiecke DBC, AEC, ABF ausserhalb von $\triangle ABC$, so dass BC, CA, AB jeweils die Basen sind. Zeige dass sich die Rechtwinkligen zu EF, FD, DE durch A, B bzw. C in einem Punkt schneiden.

8. Ein konvexes Sechseck $ABCDEF$ ist einem Kreis einbeschrieben und es gilt $AB = CD = EF$. Ausserdem treffen sich die Diagonalen AD, BE und CF in einem Punkt. Sei P der Schnittpunkt von AD und CE. Zeige

$$\frac{CP}{PE} = \left(\frac{AC}{CE}\right)^2.$$