

Ungleichungen 2 - Aufgaben

Aktualisiert: 15. Juni 2016
vers. 2.0.0

1 Konvexität

1.1 Extrema an Intervallendpunkten

1. Seien $0 \leq a, b, c, d \leq 1$ Beweise, dass

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) + a + b + c + d \geq 1.$$

2. Für die nichtnegativen Zahlen a, b, c, A, B, C gilt $a + A = b + B = c + C = s$. Beweise, dass dann gilt

$$aB + bC + cA \leq s^2.$$

3. (Bulgarien 95) Sei $n \geq 2$ und seien $0 \leq x_1, \dots, x_n \leq 1$. Beweise, dass

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

4. (USA 77) Sei $0 < p < q$ und seien $a, b, c, d, e \in [p, q]$ reelle Zahlen. Beweise, dass gilt

$$(a + b + c + d + e) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \leq 25 + 6 \left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}} \right)^2.$$

5. Sei A ein reguläres n -Eck mit Flächeninhalt 1. Auf jeder Seite von A wird ein beliebiger Punkt gewählt. Diese n Punkte bestimmen ein neues konvexes n -Eck B . Bestimme die kleinstmögliche Fläche von B .

1.2 Jensen

1. AM-QM

2. AM-GM

3. (CH2000) $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x + y + z = 1$

$$\sqrt{7x+3} + \sqrt{7y+3} + \sqrt{7z+3} \leq 7.$$

4. $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$, $x + y + z \geq 1$.

$$\frac{x\sqrt{x}}{y+z} + \frac{y\sqrt{y}}{z+x} + \frac{z\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5. (CH2010, 4.) $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$, $xyz = 1$

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \geq x+y+z.$$

6. $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^{x_1 + \dots + x_n} \leq x_1^{x_1} \dots x_n^{x_n}.$$

2 Das Standardrepertoire II

2.1 Hölder

1. Beweise für positive Zahlen x, y, z die Ungleichung

$$(x^7 + y^4 + z)(y^7 + z^4 + x)(z^7 + x^4 + y) \geq (x^4 + y^4 + z^4)^3.$$

2. Sei P ein Polynom mit positiven Koeffizienten. Seien x_1, \dots, x_n positive reelle Zahlen. Beweise, dass gilt

$$P(x_1) \cdot P(x_2) \cdots P(x_n) \geq P(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n})^n.$$

2.2 Bernoulli

1. (USA 92) Sei $a = (m^{m+1} + n^{n+1})/(m^m + n^n)$ für positive ganze Zahlen m, n . Beweise, dass gilt

$$a^m + a^n \geq m^m + n^n.$$

3 Weitere Methode

3.1 Mixing Variables

1. Seien a, b, c nichtnegative reelle Zahlen. Beweise, dass gilt

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc + 2 \geq a + b + c + ab + bc + ca.$$

4 Weitere Aufgaben

4.1 Einfache Ungleichungen

1. Seien $a, b, c > 0$. Zeige, dass gilt

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

2. (CH 2000) Die positiven reellen Zahlen x, y und z haben Summe 1. Zeige, dass gilt

$$\sqrt{7x+3} + \sqrt{7y+3} + \sqrt{7z+3} \leq 7.$$

Kann die Zahl 7 auf der rechten Seite durch eine kleinere Zahl ersetzt werden?

3. Seien a, b, c, d, e reelle Zahlen. Zeige, dass gilt

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$$

4. (APMO 89) Seien x_1, \dots, x_n positive reelle Zahlen mit Summe S . Beweise, dass gilt

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \leq 1 + S + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \dots + \frac{S^n}{n!}.$$

5. (USA 93) Sei $n \geq 2$. Die zwei positiven reellen Zahlen a und b erfüllen die Gleichungen

$$a^n = a + 1, \quad b^{2n} = b + 3a.$$

Welche der beiden ist grösser?

6. (APMO 91) Seien a_1, \dots, a_n und b_1, \dots, b_n positive Zahlen mit $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$. Beweise, dass gilt

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{2}.$$

7. (USA TST 2000) Seien a, b, c nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass gilt

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \leq \max(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2, (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2, (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2.$$

8. (USA 78) a, b, c, d, e seien reelle Zahlen mit

$$a + b + c + d + e = 8a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16.$$

Was ist der grösstmögliche Wert der grössten dieser Zahlen?

9. (CH 05) Beweise für alle $a_1, \dots, a_n > 0$ die folgende Ungleichung und bestimme alle Fälle, in denen das Gleichheitszeichen steht:

$$\sum_{k=1}^n k a_k \leq \binom{n}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^k.$$

10. (CH 05) Finde den grösstmöglichen Wert des Ausdrucks

$$\frac{xyz}{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)},$$

wobei x, y, z positive reelle Zahlen sind.

11. (CH 03) Für die positiven reellen Zahlen a, b, c gelte $a + b + c = 2$. Zeige, dass die folgende Ungleichung erfüllt ist und bestimme alle Fälle, in denen das Gleichheitszeichen steht:

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{27}{13}$$

12. (CH 02) Beweise für jede positive reelle Zahl a und jedes ganze $n \geq 1$ die Ungleichung

$$a^n + \frac{1}{a^n} - 2 \geq n^2 \left(a + \frac{1}{a} - 2 \right),$$

und bestimme alle Fälle, in denen das Gleichheitszeichen gilt.

13. (CH 01) Seien a, b und c die Seiten eines Dreiecks. Beweise die Ungleichung

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{c+a-b} + \sqrt{b+c-a} \leq \frac{a}{+} \frac{b}{+} \frac{c}{+}.$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

14. Für alle reellen a, b, c gilt

$$\sum (a+b-c)(a-b)^2 \geq 0$$

15. (Shortlist 93) Seien $a, b, c, d > 0$. Zeige, dass gilt

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

16. (IMO 04) Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl und seien t_1, t_2, \dots, t_n positive reelle Zahlen, für die gilt

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right).$$

Zeige, dass t_i, t_j, t_k die Seiten eines Dreiecks sind für alle i, j, k mit $1 \leq i < j < k \leq n$.

17. (CH 2000) Die reellen Zahlen a_1, a_2, \dots, a_{16} erfüllen die beiden Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{16} a_i = 100 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{16} a_i^2 = 1000.$$

Was ist der grösstmögliche Wert, den a_{16} annehmen kann?

18. (IMO 99) Bestimme die kleinste positive Konstante C , sodass für alle nichtnegativen reellen Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n gilt

$$\sum_{i < j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_n \right)^4.$$

Wann steht das Gleichheitszeichen?

19. (USA TST 01) Sei a_0, a_1, a_2, \dots eine Folge reeller Zahlen, sodass für alle $n \geq 0$ gilt $a_{n+1} \geq a_n^2 + \frac{1}{5}$. Beweise, dass $\sqrt{a_{n+1}} \geq a_{n-5}^2$ ist für alle $n \geq 5$.

20. (APMO 98) Beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b, c gilt

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2 \left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

21. (APMO 96) Seien m, n positive ganze Zahlen mit $n \leq m$. Beweise, dass gilt

$$2^m n! \leq \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leq (m^2 + m)^n.$$

22. (APMO 02) Seien a_1, a_2, \dots, a_n nichtnegative ganze Zahlen. Beweise, dass gilt

$$a_1! a_2! \cdots a_n! \geq \left(\lfloor \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rfloor\right)^2.$$

4.2 Mittlere Ungleichungen

1. (APMO 02) Für die positiven reellen Zahlen a, b, c gelte $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Beweise, dass

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \geq \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

2. (APMO 2000) Zeige, dass für alle positiven ganzen Zahlen $n > m$ gilt

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^n}{m^m(n-m)^{n-m}} < \frac{n!}{m!(n-m)!} < \frac{n^n}{m^m(n-m)^{n-m}}.$$

3. (APMO 99) Für die reellen (positiv?) Zahlen a_1, a_2, a_3, \dots gilt $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ für alle $i, j \geq 1$. Beweise, dass gilt

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n} \geq a_n.$$

4. (APMO 03) Sei $n > 1$ ganz und seien a, b, c die Seiten eines Dreiecks mit Umfang 1. Beweise, dass gilt

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} + \sqrt[n]{b^n + c^n} + \sqrt[n]{c^n + a^n} < 1 + \frac{\sqrt[n]{2}}{2}.$$

5. (USA TST 03) Seien a, b, c reelle Zahlen aus dem Intervall $]0, \pi/2[$. Beweise, dass gilt

$$\frac{\sin a \sin(a-b) \sin(a-c)}{\sin(b+c)} + \frac{\sin b \sin(b-c) \sin(b-a)}{\sin(c+a)} + \frac{\sin c \sin(c-a) \sin(c-b)}{\sin(a+b)} \geq 0.$$

6. Seien $x, y, z > 0$. Beweise, dass gilt

$$(x^2(y+z))^{z-y} \cdot (y^2(z+x))^{z-y} \cdot (z^2(x+y))^{x-z} \leq 1.$$

7. Für alle reellen Zahlen a, b, c, d gilt

$$(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) + (a-c)^2(b-d)^2 \geq 0.$$

8. (CH 04) Seien a und b feste positive Zahlen. Finde in Abhängigkeit von a und b den kleinstmöglichen Wert der Summe

$$\frac{x^2}{(ay + bz)(az + by)} + \frac{y^2}{(az + bx)(ax + bz)} + \frac{z^2}{(ax + by)(ay + bx)},$$

wobei x, y, z psitive reelle Zahlen sind.

9. (CH 04) Für die positiven reellen Zahlen a, b, c gelte $abc = 1$. Beweise die folgende Ungleichung:

$$\frac{ab}{a^5 + ab + b^5} + \frac{bc}{b^5 + bc + c^5} + \frac{ca}{c^5 + ca + a^5} \leq 1.$$

10. (Moldavien 99?) Beweise für $a, b, c > 0$ die Ungleichung

$$\frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ca}{b(b+c)} \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}.$$

11. Seien $x, y, z > 0$ mit $xyz = 1$. Zeige, dass gilt

$$\frac{x-1}{y+1} + \frac{y-1}{z+1} + \frac{z-1}{x+1} \geq 0.$$

12. Seien $a, b, c > 0$. Zeige, dass gilt

$$\frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{b+a} + \frac{c+a}{c+b} \leq \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}.$$

13. (MOP 04) Zeige, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b, c gilt

$$\left(\frac{a+2b}{a+2c}\right)^3 + \left(\frac{b+2c}{b+2a}\right)^3 + \left(\frac{c+2a}{c+2b}\right)^3 \geq 3.$$

14. Seien a, b, c positiv mit $abc = 1$. Zeige, dass gilt

$$5 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq (1+a)(1+b)(1+c).$$

15. Seien $x, y, z > 0$. Beweise, dass gilt

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{y + \sqrt{y}} + \sqrt{z + \sqrt{z}} \leq \sqrt{x + \sqrt{y}} + \sqrt{y + \sqrt{z}} + \sqrt{z + \sqrt{x}}.$$

16. Beweise für positive a, b, c

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq 1.$$

17. Beweise für $a, b, c, d > 0$ die Ungleichung

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3 + 63bcd}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b^3 + 63cda}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c^3 + 63dab}} + \frac{d}{\sqrt[3]{d^3 + 63abc}} \geq 1.$$

18. (USA 01) Seien a, b, c nichtnegative reelle Zahlen mit

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4.$$

Beweise, dass gilt

$$0 \leq ab + bc + ca - abc \leq 2.$$

19. (USA 99) Sei $n > 3$ und a_1, a_2, \dots, a_n reelle Zahlen mit

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \quad \text{und} \quad a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq n^2.$$

Beweise, dass $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \geq 2$.

20. (USA 98) Seien a_0, a_1, \dots, a_n Zahlen aus dem Intervall $]0, \pi/2[$ mit

$$\tan(a_0 - \frac{\pi}{4}) + \tan(a_1 - \frac{\pi}{4}) + \dots + \tan(a_n - \frac{\pi}{4}) \geq n - 1.$$

Beweise, dass gilt

$$\tan a_0 \tan a_1 \cdots \tan a_n \geq n^{n+1}.$$

21. (USA 91) Seien m und n positive ganze Zahlen und sei $a = (m^{m+1} + n^{n+1}) / (m^m + n^n)$. Beweise, dass gilt $a^m + a^n \geq m^m + n^n$.

22. (USA 98) Seien u und v reelle Zahlen mit

$$(u + u^2 + u^3 + \dots + u^8) + 10u^9 = (v + v^2 + v^3 + \dots + v^{10}) + 10v^{11} = 8.$$

Welche der beiden Zahlen ist grösser?

23. (USA 93) Sei a_0, a_1, a_2, \dots eine Folge positiver reeller Zahlen, sodass für alle $i \geq 1$ gilt $a_{i-1}a_{i+1} \leq a_i^2$. Beweise, dass für alle $n > 1$ gilt

$$\frac{a_0 + \dots + a_n}{n+1} \cdot \frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \geq \frac{a_0 + \dots + a_{n-1}}{n} \cdot \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

24. (USA 94) Sei a_1, a_2, a_3, \dots eine Folge positiver reeller Zahlen, sodass für alle $n \geq 1$ gilt $\sum_{k=1}^n a_k \geq \sqrt{n}$. Beweise, dass für alle $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 > \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

25. (Japan 97) Beweise für $a, b, c > 0$ die folgende Ungleichung:

$$\frac{b+c-a}{(b+c)^2+a^2} + \frac{c+a-b}{(c+a)^2+b^2} + \frac{a+b-c}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

26. Seien a, b, c und x, y, z Seiten eines Dreiecks. Beweise, dass gilt

$$a^2(by + cz - ax) + b^2(ax + cz - by) + c^2(ax + by - cz) > 0$$

27. Seien $a, b, c > 0$. Beweise die folgende Ungleichung:

$$\frac{a^2 - bc}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2 - ca}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{c^2 - ab}{2c^2 + a^2 + b^2} \geq 0.$$

28. Seien a, b, c, x, y, z nichtnegative reelle Zahlen mit $a + b + c = x + y + z$. Zeige, dass gilt

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + xyz \geq 4abc$$

29. (CH 03) Finde die grösste reelle Zahl C_1 und die kleinste reelle Zahl C_2 , sodass für alle positiven Zahlen a, b, c, d, e gilt

$$C_1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+e} + \frac{e}{e+a} < C_2.$$

30. Sei $\lambda > 0$. Zeige, dass die Ungleichung

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + \lambda bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + \lambda ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + \lambda ab}} \geq \frac{3}{\sqrt{1 + \lambda}}$$

genau dann für alle $a, b, c > 0$ gilt, wenn $\lambda \geq 8$.

31. Betrachte nichtnegative reelle Zahlen $a \geq b \geq c \geq d \geq e$ mit Summe 1. Beweise, dass gilt

$$ae + ad + bc + be + cd \leq \frac{1}{5}.$$

32. (IMO 03) Sei n eine natürliche Zahl und seien $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ reelle Zahlen. Beweise, dass gilt

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j|^2.$$

Zeige, dass genau dann das Gleichheitszeichen steht, wenn x_1, \dots, x_n eine arithmetische Folge ist.

33. (USA 04) Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Zeige, dass gilt

$$(a^5 - a^2 + 39(b^5 - b^2 + c)(c^5 - c^2 + 3)) \geq (a + b + c)^2.$$

34. (APMO 05) Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $abc = 8$. Zeige, dass gilt

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}.$$

4.3 Schwierige Ungleichungen

1. Seien a, b, c, d positive reelle Zahlen. Beweise folgende Ungleichung und bestimme alle Fälle, in denen das Gleichheitszeichen steht:

$$\frac{3}{1} + \frac{5}{1+a} + \frac{7}{1+a+b} + \frac{9}{1+a+b+c} + \frac{36}{1+a+b+c+d} \leq 4 \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right).$$

2. (USA TST 01) Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $a + b + c \geq abc$. Beweise, dass von den folgenden drei Ungleichungen mindestens zwei richtig sind:

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{6}{c} \geq 6, \quad \frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{6}{a} \geq 6, \quad \frac{2}{c} + \frac{3}{a} + \frac{6}{b} \geq 6.$$

3. (Shortlist 04) Seien $a, b, c > 0$ mit $ab + bc + ca = 1$. Beweise die Ungleichung

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}.$$

4. (USA 2000) Seien $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass gilt

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min\{a_i a_j, b_i b_j\} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min\{a_i b_j, a_j b_i\}.$$