Lösungen zu Ungleichungen

Aktualisiert: 4. April 2016
vers. 1.0.0

1 Algebraische Umformungen

1.1 Kein Quadrat ist negativ

1. Nehme an doch. Dann ist ihre Summe grösser als 1. Die Ungleichung

$$(a-b^2)+(b-c^2)+(c-d^2)+(d-a^2)>1$$

lässt sich umformen zu

$$(a-1/2)^2+(b-1/2)^2+(c-1/2)^2+(d-1/2)^2<0.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, denn die linke Seite ist ≥ 0.

2. Multiplikation mit $abc>0$ ergibt die äquivalente Ungleichung

$$a^2+b^2+c^2\geq 2(bc+ca-ab).$$

Dies ist aber nichts anderes als

$$(a+b-c)^2\geq 0,$$

was sicher richtig ist. Gleichheit gilt genau dann, wenn $c=a+b$.

3. Multipliziert man mit 4 und bringt alles auf die linke Seite, wird die Ungleichung zu

$$x^2+y^2+4z^2+2xy-4yz-4zx\geq 0.$$

Die linke Seite ist nun gleich $(x+y-2z)^2$, also nichtnegativ.

4. Durch Vervollständigen der Quadrate erhält man

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+1=\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)^2+\left(\frac{4b-a^2-c^2}{4}\right)x^2+\left(\frac{c}{2}x+1\right)^2.$$

Der erste und der dritte Summand sind nicht negativ, der zweite aber auch nicht, denn nach Voraussetzung ist ja $4b-a^2-c^2\geq 0$.

5. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nach Vorzeichen von $ab - c$. Gilt $ab - c = 3$, dann folgt

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(3 + c - ab) = (a - b)^2 + (c + 1)^2 + 5 \geq 5,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a = b$ und $c = -1$, also wenn $a = b = \pm\sqrt{2}$ und $c = -1$. Gilt hingegen $ab - c = -3$, dann folgt analog

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(3 - c + ab) = (a + b)^2 + (c - 1)^2 + 5 \geq 5,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a = -b$ und $c = 1$, also wenn $a = -b = \pm\sqrt{2}$ und $c = 1$.

6. Nach Quadrieren und Vereinfachen ist die Ungleichung äquivalent zu

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab,$$

und diese wiederum zu

$$(ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2 \geq 0,$$

vergleiche die Lösung zu Beispiel 3.

7. Durch Vervollständigung der Quadrate von links nach rechts erhält man

$$\begin{aligned}
& 4a^8 - 2a^7 + a^6 - 3a^4 + a^2 - a + 1 \\
= \;& a^6(a - 1)^2 + 3a^8 - 3a^4 + a^2 - a + 1 \\
= \;& a^6(a - 1)^2 + 3(a^4 - 1/2)^2 + a^2 - a + 1/4 \\
= \;& a^6(a - 1)^2 + 3(a^4 - 1/2)^2 + (a - 1/2)^2 \\
\geq \;& 0.
\end{aligned}$$

Gilt hier Gleichheit, dann müssen alle drei Klammern verschwinden, aber es kann nicht gleichzeitig $a = 1/2$ und $a^4 = 1/2$ gelten. Folglich steht das strikte Ungleichheitszeichen.

1.2 Faktorisieren, Terme umordnen

1. Die Ungleichung ist äquivalent zu

$$a^3 + b^3 + c^3 - (a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2) + 3abc \geq 0,$$

und dies ist nichts anderes als die Ungleichung von Schur für $p = 1$.

2. Wir logarithmieren beide Seiten (beachte dabei, dass der Logarithmus eine streng monoton steigende Funktion ist und die Umformung daher eine Äquivalenzumformung ist; Das Gleichheitszeichen bleibt, wie es ist):

$$2yz\ln x + 2zx\ln y + 2xy\ln z \leq x^2(\ln y + \ln z) + y^2(\ln z + \ln x) + z^2(\ln x + \ln y).$$

Umformen liefert nun die Ungleichung

$$(x - y)^2\ln z + (y - z)^2\ln x + (z - x)^2\ln y \geq 0.$$

Nach Voraussetzung gilt $\ln x, \ln y, \ln z \geq 0$, also ist die linke Seite tatsächlich nicht negativ.

3. Wir dividieren die Ungleichung durch a^2 und substituieren $x = b/a$ und $y = c/a$. Dann gilt $x, y > 0$ und die Ungleichung wird zu

$$(1+x)(1+y) \geq 2\sqrt{xy(1+x+y)}.$$

Quadrieren und Umformen liefert der Reihe nach

$$\begin{aligned}
(1+x)^2(1+y)^2 - 2xy(1+x+y) &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad x^2y^2 - 2x^2y - 2xy^2 + x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad x^2y^2 - 2xy(x+y+1) + (x+y+1)^2 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad (x+y+1-xy)^2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist sicher richtig.

4. Wir kopieren den Beweis im Skript. Wegen der Symmetrie können wir wieder $x \geq y \geq z \geq 0$ annehmen. Wir können die linke Seite nun umordnen und erhalten

$$(x-y)\left(f(x)(x-z) - f(y)(y-z)\right) + f(z)(x-z)(y-z).$$

Nach Voraussetzung ist hier wieder jede Klammer ≥ 0, zum Beispiel ist $x - z \geq y - z \geq 0$ und wegen der Monotonie von f auch $f(x) \geq f(y) \geq 0$, insgesamt also $f(x)(x-z) - f(y)(y-z) \geq 0$. Wir nehmen jetzt an, dass f streng monoton steigend ist mit $f(0) = 0$ und bestimmen die Gleichheitsbedingungen. Wenn obiger Ausdruck verschwindet, müssen beide Summanden verschwinden. Aus $f(z)(x-z)(y-z) = 0$ folgt, dass $z = 0$ oder $y = z$ ist. Im ersten Fall muss $x = y$ sein, denn sonst ist $(x-y)(f(x)x - f(y)y)$ wegen der strengen Monotonie von f strikt positiv. Im zweiten Fall folgt $(x-y)^2 f(x) = 0$ und somit $x = 0$ oder $x = y$ nach Voraussetzung an f, also $x = y = z$. Umgekehrt gilt sicher Gleichheit, wenn alle drei Variablen gleich sind, oder wenn zwei gleich sind und die dritte gleich 0.

5. Nach Ausmultiplizieren und Vereinfachen ist die Ungleichung äquivalent zu

$$-3x^2y^2 + 4x^3 + 4y^3 - 6xy + 1 \geq 0.$$

Da x und y nichtnegativ sind, gilt $4x^3 + 4y^3 \geq 8\sqrt{xy}^3$ nach AM-GM. Wir setzen nun $a = \sqrt{xy}$, dann ist $0 \leq a \leq 1$ und es genügt zu zeigen, dass $-3a^4 + 8a^3 - 6a^2 + 1 \geq 0$ gilt. Eine kurze Rechnung zeigt

$$-3a^4 + 8a^3 - 6a^2 + 1 = (3a+1)(1-a)^3 \geq 0.$$

Gleichheit gilt nur für $x = y = 1$.

Man kann diesen Beweis auch in die folgende Form komprimieren: Die Ungleichung ist äquivalent zu

$$4(x^{3/2} - y^{3/2})^2 + (3\sqrt{xy} + 1)(1 - \sqrt{xy})^3 \geq 0.$$

6. Wir formen die Ungleichung schrittweise um und spalten dabei fortlaufend Faktoren ab. Beachte dabei speziell den Trick in der 3. Zeile, nämlich die Zerlegung $c^4 - a^4 = (c^4 - b^4) + (b^4 - a^4)$. Sie dient dazu, die Anzahl verschiedener Terme zu verkleinern und trägt zur besseren Übersicht bei.

$$\begin{aligned}
ab^4 + bc^4 + ca^4 - ba^4 - cb^4 - ac^4 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad a(b^4 - c^4) + b(c^4 - a^4) + c(a^4 - b^4) &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad a(b^4 - c^4) + b(c^4 - b^4) + b(b^4 - a^4) + c(a^4 - b^4) &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad (b-a)(c^4 - b^4) - (c-b)(b^4 - a^4) &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad (c-b)(b-a)(c^3 + c^2b + cb^2 + b^3) - (c-b)(b-a)(b^3 + b^2a + ba^2 + a^3) &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad (c-b)(b-a)(c^3 - a^3 + c^2b + cb^2 - b^2a - ba^2) &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad (c-b)(b-a)(c-a)(c^2 + b^2 + a^2 + cb + ba + ac) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Auf der linken Seite der untersten Zeile sind die ersten drei Faktoren nach Voraussetzung ≥ 0. Der vierte Faktor ist aber ebenfalls ≥ 0, siehe Beispiel 3.

2 Das Standartrepertoire

2.1 HM-GM-AM-QM

1. Quadrieren und Vereinfachen ergibt die äquivalente Ungleichung

$$2\sqrt{abcd} \leq ac + bd.$$

Dies ist nichts anderes als AM-GM.

2. Nach AM-GM gilt

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1} \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdots \frac{x_n}{x_1}} = n \cdot 1 = n.$$

3. Nach Division mit $\sqrt{xyz}$ lautet die Ungleichung

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \leq \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} + \frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

Nach HM-GM gilt

$$\frac{2}{x+y} \leq \sqrt{\frac{1}{xy}} = \frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

Addiert man diese und die beiden analogen Ungleichungen, folgt das Gewünschte.

4. Multiplikation mit $abc > 0$ ergibt

$$a+b+c \leq \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}.$$

Nach AM-GM gilt

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} = 2b.$$

Addiert man diese und die beiden analogen Ungleichungen und dividiert durch 2, folgt das Gewünschte.

5. Es gilt nach AM-GM

$$\frac{x}{x^4+y^2} \leq \frac{x}{2\sqrt{x^4y^2}} = \frac{x}{2x^2y} = \frac{1}{2xy}.$$

Analog folgt $y/(x^2+y^4) \leq 1/(2xy)$. Addition ergibt die gesuchte Ungleichung.

6. Wendet man AM-GM auf die beiden Summanden einzeln an, dann folgt

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^m + \left(1+\frac{b}{a}\right)^m \geq \left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^m + \left(2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^m = 2^m\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{m/2} + \left(\frac{b}{a}\right)^{m/2}\right).$$

Die letzte Klammer ist ≥ 2 nach Beispiel 5. Somit ist der Ausdruck auf der linken Seite mindestens gleich 2^{m+1}.

7. Nach AM-HM gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d} \\ \geq\ & \frac{6^2}{(a+b)+(a+c)+(a+d)+(b+c)+(b+d)+(c+d)} \\ =\ & \frac{12}{a+b+c+d}, \end{aligned}$$

dies beweist die linke Ungleichung. Für die rechte Ungleichung addiere man die Ungleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b},$$

(wieder AM-HM) sowie die fünf analogen (ersetze (a,b) durch $(a,c), (a,d), (b,c), (b,d)$ und (c,d)) und teile durch 4.

2.2 Cauchy-Schwarz

1. Es gilt nach C.S.

$$(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)) \cdot \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geq (a+b+c)^2.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass

$$(a+b+c)^2 \geq \frac{3}{2}(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b))$$

gilt. Nach Ausmultiplizieren und Vereinfachen ist dies äquivalent zu $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, was nach AM-GM richtig ist.

2. Nach C.S. gilt

$$((y+z)+(z+x)+(x+y)) \cdot \left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right) \geq (x+y+z)^2.$$

Division mit $2(x+y+z)$ ergibt die gewünschte Ungleichung.

3. Nach C.S. gilt

$$(a+b+c+d) \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\right) \geq (1+1+2+4)^2 = 64.$$

Und wieder liefert Division mit $a+b+c+d$ das Gewünschte.

4. Wir schreiben $P(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ mit positiven Koeffizienten x_i. Nach Voraussetzung gilt die gegebene Ungleichung für $x = 1$, folglich ist $P(1) \geq 1/P(1)$, also $P(1) \geq 1$. Nach C.S. gilt nun für alle $x > 0$

$$\begin{aligned} P(x) \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) &= (c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0) \cdot \left(\frac{c_n}{x^n} + \ldots + \frac{c_1}{x} + c_0\right) \\ &\geq (c_n + \ldots + c_1 + c_0)^2 \\ &= P(1)^2 \geq 1. \end{aligned}$$

Division mit $P(x)$ ergibt die Behauptung.

5. C.S. liefert

$$(c+a+b) \cdot \left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\right) \geq (a+b+c)^2.$$

Division mit $a+b+c$ ergibt die gewünschte Ungleichung.

6. Wir bezeichnen die linke Seite der Ungleichung mit A und setzen ausserdem

$$B = a\sqrt{a^2+8bc} + b\sqrt{b^2+8ca} + c\sqrt{c^2+8ab}.$$

Nach C.S. gilt nun

$$B \cdot A \geq (a+b+c)^2,$$

und es genügt zu zeigen, dass $(a+b+c)^2 \geq B$ gilt. Wiederum nach C.S. (diesmal in die andere Richtung) gilt

$$B^2 \leq (a+b+c)\left(a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)\right).$$

Es bleibt zu zeigen, dass der zweite Faktor auf der rechten Seite höchstens gleich $(a+b+c)^3$ ist, dies ist nach Ausmultiplizieren und Vereinfachen aber äquivalent zu

$$18abc \leq 3(a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b),$$

was wiederum einfach aus AM-GM folgt. Damit ist der Beweis abgeschlossen, Gleichheit gilt nur für $a=b=c$.

7. Die AM-HM Ungleichung lässt sich umschreiben zu

$$(a_1+\ldots+a_n)\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Nach C.S. ist die linke Seite tatsächlich grösser als $(1+\ldots+1)^2 = n^2$. Gleichheit gilt genau dann, wenn die Vektoren $(a_1,\ldots,a_n)$ und $(1/a_1,\ldots,1/a_n)$ kollinear sind. Dies bedeutet, dass es eine reelle Zahl λ gibt, sodass für $i=1,\ldots,n$ gilt $a_i^2=\lambda$. Dies ist nur dann der Fall, wenn alle a_i gleich sind.
AM-QM folgt aus C.S. mit folgender Rechnung

$$(1+\ldots+1)\cdot(a_1^2+\ldots+a_n^2) \geq (a_1+\ldots+a_n)^2.$$

Wieder implizieren die Gleichheitsbedingungen in C.S., dass das Gleichheitszeichen nur dann steht, wenn alle a_i gleich sind.

2.3 Geordnete Folgen

1. Die Folgen $x_1^2,\ldots,x_n^2$ und $1/x_1,\ldots,1/x_n$ sind entgegengesetzt geordnet. Nach dem Hauptsatz gilt daher

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \frac{1}{y_1} & \frac{1}{y_2} & \cdots & \frac{1}{y_n} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \cdots & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix} = x_1+x_2+\ldots+x_n.$$

2. Die Folgen x^2,y^2,z^2 und yz,zx,xy sind entgegengesetzt geordnet (man kann z.B. $x \geq y \geq z$ annehmen, dann ist dies leicht einzusehen). Nach dem Hauptsatz ist daher

$$x^2yz+y^2zx+z^2xy = \begin{bmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ xy & yz & zx \end{bmatrix} = x^3y+y^3z+z^3x.$$

3. Logarithmieren ergibt die äquivalente Ungleichung

$$a\ln a+b\ln b+c\ln c \geq b\ln a+c\ln b+a\ln c$$

(beachte die Bemerkungen zum Logarithmus in der Lösung von Aufgabe 2, Abschnitt 1.2.) Der Logarithmus ist monoton steigend, daher sind die Folgen a,b,c und $\ln a,\ln b,\ln c$ gleich geordnet. Die Behauptung folgt nun aus dem Hauptsatz.

4. Ausmultiplizieren und Vereinfachen ergibt

$$\sum_{k=1}^{n} -2x_k y_k \leq \sum_{k=1}^{n} -2x_k z_k,$$

beachte dabei, dass die y_k^2 und die z_k^2 sich gegenseitig wegheben, denn die z_k sind eine Permutation der y_k. Dies ist wiederum äquivalent zu

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geq \sum_{k=1}^{n} x_k z_k,$$

was direkt aus dem Hauptsatz folgt, denn die Folgen (x_k) und (y_k) sind nach Voraussetzung gleich geordnet.

5. Nach Voraussetzung sind die Folgen a, b und ce, df gleichgeordnet. Dasselbe gilt für die Folgen c, d und e, f. Zweimalige Anwendung der Ungleichung von Chebychef liefert nun

$$ace + bdf \geq \frac{1}{2}(a+b)(ce+df) \geq \frac{1}{4}(a+b)(c+d)(e+f),$$

dies ist die linke Ungleichung.

Die Folgen a, f und ce, bd sind entgegengesetzt geordnet, ebenso wie die Folgen b, e und c, d. Wieder folgt wieder aus Chebychef

$$ace + bdf \leq \frac{1}{2}(a+f)(ce+bd) \leq \frac{1}{4}(a+f)(b+e)(c+d),$$

dies ist die rechte Ungleichung.

6. Logarithmieren ergibt die äquivalente Ungleichung

$$a \ln a + b \ln b + c \ln c \geq \frac{a+b+c}{3}(\ln a + \ln b + \ln c).$$

(beachte die Bemerkungen zum Logarithmus in der Lösung von Aufgabe 2, Abschnitt 1.2.) Der Logarithmus ist monoton steigend, daher sind die Folgen a, b, c und $\ln a, \ln b, \ln c$ gleich geordnet. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Chebychef.

7. Seien $a_1, \ldots, a_n$ positive Zahlen. Die Folgen $a_1, \ldots, a_n$ und $1/a_1, \ldots, 1/a_n$ sind entgegengesetzt geordnet, somit gilt nach Chebychef

$$n = \left(a_1 \cdot \frac{1}{a_1} + \ldots + a_n \cdot \frac{1}{a_n}\right) \leq \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Nach Umformen ergibt dies gerade AM-HM. Andererseits folgt ebenfalls mit Chebychef

$$a_1 \cdot a_1 + \ldots + a_n \cdot a_n \geq \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)(a_1 + \ldots + a_n),$$

dies ist äquivalent zu AM-QM.