Ungleichungen I - Aufgaben

Aktualisiert: 1. Dezember 2015
vers. 1.0.0

1 Algebraische Umformungen

Kein Quadrat ist negativ

1.1 a, b, c, d sind reelle Zahlen. Zeige, dass nicht alle vier Zahlen

$$a - b^2, \quad b - c^2, \quad c - d^2, \quad d - a^2$$

grösser als $1/4$ sein können.

1.2 Seien a, b, c positive reelle Zahlen, dann ist

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right).$$

Wann gilt Gleichheit?

1.3 Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq \frac{3}{4}(x-y)^2.$$

1.4 Für die reellen Zahlen a, b, c gelte $a^2 + c^2 \leq 4b$ Zeige, dass für alle reellen x gilt

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 \geq 0.$$

1.5 Seien a, b, c reelle Zahlen mit $|ab - c| = 3$. Finde den kleinstmöglichen Wert von

$$a^2 + b^2 + c^2.$$

1.6 Seien a, b, c positiv. Zeige:

$$ab + bc + ca \geq \sqrt{3abc(a+b+c)}.$$

1.7 (Australien 01) Für alle reellen Zahlen a gilt

$$4a^8 - 2a^7 + a^6 - 3a^4 + a^2 - a + 1 > 0.$$

Faktorisieren, Terme umordnen

1.1 (IMO 64) Zeige, dass für alle $a, b, c \geq 0$ gilt

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

1.2 Seien $x, y, z \geq 1$. Beweise die folgende Ungleichung und bestimme alle Fälle, in denen Gleichheit gilt:

$$(x^2)^{yz}(y^2)^{zx}(z^2)^{xy} \leq (yz)^{x^2}(zx)^{y^2}(xy)^{z^2}.$$

1.3 (Weissrussland 01) Seien $a, b, c > 0$. Zeige, dass gilt

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$$

und bestimme alle Fälle, wo das Gleichheitszeichen steht.

1.4 Beweise folgende Verallgemeinerung von Schur: Ist $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine monoton wachsende Funktion, dann gilt für alle $x, y, z \geq 0$ die Ungleichung

$$f(x)(x-y)(x-z) + f(y)(y-z)(y-x) + f(z)(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Ist f sogar *streng* monoton steigend mit $f(0) = 0$, dann gilt genau dann das Gleichheitszeichen, wenn alle drei Variablen gleich sind, oder wenn zwei gleich sind und die dritte gleich 0.

1.5 Seien $0 \leq x, y \leq 1$ reelle Zahlen. Zeige, dass gilt

$$(1-xy)^2 \geq 4(x-y^2)(y-x^2).$$

1.6 Seien $a \leq b \leq c$ drei reelle Zahlen. Beweise, dass gilt

$$ab^4 + bc^4 + ca^4 \geq ba^4 + cb^4 + ac^4.$$

2 Das Standardrepertoire

HM-GM-AM-QM

2.1 Für $a, b, c, d > 0$ gilt

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+d)(b+c)}.$$

2.2 Für $x_1, \ldots, x_n > 0$ gilt

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$

2.3 Zeige, dass für positive Zahlen x, y, z gilt

$$\sqrt{xyz}\left(\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x}\right) \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

2.4 Seien a, b, c positiv. Zeige:

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

2.5 (CH 98) Für alle positiven Zahlen x und y gilt

$$\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{x^2+y^4} \leq \frac{1}{xy}.$$

2.6 Für $a, b > 0$ und jede natürliche Zahl m gilt

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^m + \left(1+\frac{b}{a}\right)^m \geq 2^{m+1}.$$

2.7 (CH 95) Zeige, dass für $a, b, c, d > 0$ gilt

$$\frac{12}{a+b+c+d} \leq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d} \leq \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right).$$

Cauchy-Schwarz

2.1 (**Nesbitt**) Seien $a, b, c > 0$. Beweise die Ungleichung

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

2.2 Für $x, y, z > 0$ gilt

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

2.3 Sei $a, b, c, d \geq 0$. Zeige, dass gilt

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

2.4 Sei P ein Polynom mit positiven Koeffizienten. Zeige, dass wenn die Ungleichung

$$P\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{P(x)}$$

für $x = 1$ gilt, dann gilt sie für alle $x > 0$.

2.5 Für $a, b, c > 0$ ist

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \geq a+b+c.$$

2.6 (IMO 01) Beweise für $a, b, c > 0$ die Ungleichung

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

2.7 Beweise AM-QM und AM-HM mit Hilfe von C.S.

Geordnete Folgen

2.1 Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine positive Folge und sei $y_1, \ldots, y_n$ eine Permutation davon (also eine Vertauschung). Dann gilt
$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

2.2 Für $x, y, z \geq 0$ gilt
$$x^3y + y^3z + z^3x \geq x^2yz + y^2zx + z^2xy.$$

2.3 Für alle positive Zahlen a, b, c gilt
$$a^a b^b c^c \geq a^b b^c c^a.$$

2.4 (IMO 75) Seien x_k und y_k, $1 \leq k \leq n$, reelle Zahlen mit
$$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \quad \text{und} \quad y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n,$$
und sei $z_1, z_2, \ldots, z_n$ eine Permutation von $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Zeige, dass gilt
$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)^2.$$

2.5 Gegeben sind reelle Zahlen $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq f > 0$. Zeige, dass gilt
$$(a+b)(c+d)(e+f) \leq 4(ace + bdf) \leq (a+f)(b+e)(c+d).$$

2.6 (USA 74) Für alle positive Zahlen a, b, c gilt
$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

2.7 Beweise HM-AM-QM mit den Ungleichungen in diesem Abschnitt.