Inégalités 1

Arnaud Maret

Actualisé: 7 janvier 2019
vers. 2.1.2

Table des matières

1 Introduction

De tous les problèmes qui ont forgé la réputation des olympiades, les *inégalités* sont parmi les plus redoutés. Avec l'expérience des bonnes astuces, il est possible de résoudre une inégalité en quelques instants, alors que d'autres s'y casseront les dents sans rien obtenir. Elles qui étaient jadis quasiment incontournables à l'IMO perdent aujourd'hui en charme au profit de problèmes d'algèbre moins standards. Pour désacraliser les inégalités, si inaccessibles au début, il n'y a pas d'autre secret que la résolution en masse de problèmes, comme toujours.

Les inégalités sont très courantes en mathématiques. Quelques résultats standards de ce script sont également utiles dans d'autres domaines tels que la combinatoire, la théorie des nombres et parfois même en géométrie. Il est donc fortement conseillé de se familiariser avec les résultats de base, systématiquement encadrés en gris, ainsi qu'avec les exemples élémentaires associés dont les présentes notes ont la prétention d'exposer.

Ce nouveau script propose une présentation réorganisée par rapport à l'approche de l'excellent script par Thomas Huber qui a servi de base de travail. Les inégalités présentées en théorèmes sont regroupées en trois sections selon leur nature. Ce schéma est inspiré de Samin Riasat [1]. En plus de ces résultats, plusieurs astuces classiques sont dévoilées au fil des exemples. Parmi les sources d'inspiration, en plus d'Huber et Riasat, il s'impose de citer le travail d'Evan Chen [2].

1.1 Un premier exemple

Une inégalité n'est pas une inéquation. À l'école, traditionnellement, on s'attèle aux inéquations, c'est-à-dire qu'on recherche toutes les valeurs pour lesquelles une inégalité est satisfaite. Dans le contexte des olympiades, on se donne une inégalité et on cherche à prouver qu'elle est vérifiée quelque soit la valeur d'un certain nombre de variables.

Exemple 1. *Par exemple, on peut montrer que quelques soient les nombres réels x, y et z, on a*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

En mots, on lit : l'expression $x^2 + y^2 + z^2$ est toujours plus grande ou égale à l'expression $xy + yz + zx$. Par toujours, on entend quelque soit le choix des valeurs réelles de x,y et z.

[1] Samin Riasat, *Basic of Olympiad Inequalities.*
[2] Evan Chen, *Brief Introduction to Olympiad Inequalities.*

Pour montrer qu'une telle inégalité est vraie, il s'agit de jouer de manipulations algébriques astucieuses pour se ramener à une autre inégalité que l'on sait vérifiée. Par exemple, on sait que le carré d'un nombre réel est toujours un nombre positif ou nul. De plus, le carré d'un nombre réel est nul si et seulement si le nombre est nul. Autrement dit

$$x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Comment lier notre inégalité à la positivité des carrés ? Tout d'abord, remarquons que $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ est équivalent à $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geq 0$. Une stratégie pour montrer que $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ revient donc à travailler l'expression $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ pour faire apparaître une somme de carrés parfaits. Cette étape est l'étape véritablement subtile (lisez : difficile) de l'exercice.

Les termes xy, yz et zx font penser aux doubles produits qui apparaissent dans le développement des carrés $(x \pm y)^2, (y \pm z)^2$ et $(z \pm x)^2$. Seulement, il n'y a pas de coefficient 2. Plus précisément, on observe que les termes xy, yz et zx sont les doubles produits qui apparaissent dans le développement des termes $1/2(x \pm y)^2, 1/2(y \pm z)^2$ et $1/2(z \pm x)^2$. Avec cette observation, on arrive facilement à la relation suivante :

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = \frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{1}{2}(z-x)^2.$$

On peut alors conclure, comme attendu, que l'expression $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ est bel et bien toujours positive, car elle est égale à la moitié de la somme de trois carrés parfaits. On a ainsi démontré que l'expression $x^2+y^2+z^2$ est plus grande ou égale à $xy+yz+zx$ pour tous les nombres réels x, y et z.

Toute la difficulté du problème résidait dans cette astuce algébrique. Avec la bonne astuce, la solution est généralement très courte. Il ne faut pas pour autant croire que le problème est facile ! Les inégalités sont terriblement compliquées à prendre en main lorsqu'on débute et seule l'expérience, comme toujours, les rend appréciables et amusantes.

Une question subsidiaire, souvent posée dans un problème d'inégalité, demande de trouver *les cas d'égalité*. Par cas d'égalité, on entend l'ensemble des valeurs pour lesquelles l'inégalité devient une égalité. Par exemple, les cas d'égalité pour l'inégalité $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ sont l'ensemble des triplets de nombres réels (x, y, z) tels que $x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx$. Une telle question est généralement une formalité lorsque l'inégalité a été démontrée. Par exemple, on a

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{1}{2}(z-x)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \Leftrightarrow x=y \\ y-z=0 \Leftrightarrow y=z \\ z-x=0 \Leftrightarrow z=x. \end{cases} \end{aligned}$$

et donc les cas d'égalités sont les triplets (x, y, z) tels que $x = y = z$.

1.2 Les règles du jeu avec les inégalités

À l'école, on apprend qu'en multipliant une inéquation par un nombre négatif, ou qu'en inversant les deux membres d'une inéquation, alors il faut changer le sens de l'inégalité. Il s'agit là deux des règles de base que l'on emploie en manipulant les inégalités. Nous listons simplement ici toutes ces règles sans plus de détail, car il s'agit-là de matériel scolaire que l'on utilisera tacitement.

Théorème 1.1. *Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. *si* $a \geq c$ *et* $c \geq b$*, alors* $a \geq b$*,* $\forall a, b, c$*,*
2. *si* $a \geq b$ *et* $c \geq d$*, alors* $a + c \geq b + d$*,* $\forall a, b, c, d$*, (la réciproque est évidemment fausse en général),*
3.
   - *étant donné* $x > 0$*, alors* $a \geq b \Leftrightarrow ax \geq bx$*,* $\forall a, b$*,*
   - *étant donné* $x < 0$*, alors* $a \geq b \Leftrightarrow ax \leq bx$*,* $\forall a, b$*,*
4. $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$*, et* $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$*,*
5.
   - *étant donné* $x > 0$*, alors* $a \geq b \Leftrightarrow a^x \geq b^x$*,* $\forall a, b \geq 0$*. Par exemple, si* $a \geq b \geq 0$*, alors* $a^2 \geq b^2$ *ou* $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$ *; la positivité de* a, b *est cruciale ici,*
   - *étant donné* $x < 0$*, alors* $a \geq b \Leftrightarrow a^x \leq b^x$*,* $\forall a, b > 0$*. Par exemple, si* $a \geq b > 0$*, alors* $1/a \leq 1/b$*.*
6. *plus généralement :*
   - *étant donné une fonction croissante* f*, alors* $a \geq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$*,*
   - *étant donné une fonction décroissante* f*, alors* $a \geq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$*.*

On profite encore de cette tribune pour présenter de manière abstraite un schéma de résolution d'inégalités. En général, comme on l'a vu dans le premier exemple, un problème d'inégalité demande de montrer que

$$A(x_1, \ldots, x_n) \geq B(x_1, \ldots, x_n)$$

quelques soient les variables $x_1, \ldots, x_n$ satisfaisant certaines conditions. Par exemple, $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ ou $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Par convention, la majeure partie du temps, on emploiera les lettres a, b, c, d pour des variables positives et x, y, z, w lorsque les variables sont réelles. Ici, A et B sont deux expressions algébriques. Rien n'empêche que A ou B soit simplement constante. Il est évidement toujours possible de pratiquer quelques manipulations algébriques sur l'énoncé initial, par exemple soustraire B de chaque côté ou multiplier par 2, mais au final il reste toujours une inégalité entre deux expressions.

Une stratégie pour démontrer une inégalité consiste à retrouver une suite d'expressions intermédiaires $A_1, \ldots, A_m$ telles que

$$A(x_1, \ldots, x_n) \geq A_1(x_1, \ldots, x_n) \geq \ldots \geq A_m(x_1, \ldots, x_n) \geq B(x_1, \ldots, x_n)$$

où chacune des nouvelles inégalités intermédiaires découlent directement d'un résultat connu. En termes imagés, il faut retrouver le chemin de A à B. Trêve d'abstraction, passons à du concret.

2 Une histoire de carrés positifs

2.1 L'éternelle AM-GM

De toutes les inégalités, la plus célèbre est celle des moyennes arithm-boxétique (AM) et géométrique (GM).

Théorème 2.1 (AM-GM)**.** *Soient $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ des nombres **positifs**. Alors*

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si $a_1 = \ldots = a_n$.

Démonstration. La preuve présentée ici est inductive et à l'origine l'œuvre de ce très cher Cauchy. On abrège par Ω_n l'énoncé de l'inégalité AM-GM pour $n \geq 1$ variables. On veut montrer que Ω_n est vrai pour tout $n \geq 1$. Dans l'idéal, on aimerait pouvoir montrer que $\Omega_n \Rightarrow \Omega_{n+1}$ (comme dans une induction classique), mais il n'est pas clair comment on peut procéder. En revanche, comme on va le voir, on peut montrer facilement que $\Omega_n \Rightarrow \Omega_{2n}$. Pour pouvoir conclure, on aura encore besoin de montrer que $\Omega_n \Rightarrow \Omega_{n-1}$ et que les petits cas sont vérifiés. Commençons par les petits cas (le cas Ω_1 est évidement trivial).

1. Ω_2 : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

   Pour montrer qu'une telle inégalité est vérifiée, on doit se ramener à une inégalité connue. Comme on l'a vu en introduction, faire apparaître des carrés parfaits est une stratégie. Pour cela, il faut être à l'aise pour reconnaître les doubles produits. Dans ce cas, on peut réécrire

   $$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

   L'inégalité est donc vérifiée pour tout $a, b \geq 0$ et on a bien égalité si et seulement si $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a = b$ comme désiré.

2. Ω_3 : $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

   Ce cas n'est pas strictement requis pour l'induction, mais il est instructif. On remarque la présence d'une racine cubique que l'on aimerait autant ne pas avoir. Il y a plusieurs moyens pour s'en débarrasser. Premièrement, on pourrait élever le tout au cube, mais alors on ferait apparaître un coefficient $3^3 = 27$. Pas génial. La deuxième méthode, plus subtile, propose d'introduire de nouvelles variables. Soient $x := \sqrt[3]{a}$, $y := \sqrt[3]{b}$ et $z := \sqrt[3]{c}$. L'inégalité devient alors

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0.$$

Ce changement de variables n'est pas nécessaire dans le sens où ce n'est pas une étape décisive en vue de la conclusion. Il permet simplement d'y voir un peu plus clair (comme pour les substitutions de fonctions dans le cadre des équations fonctionnelles).

La magie du cas $n = 3$ intervient à présent. Il existe en effet, pour ce cas exclusivement, un moyen de factoriser l'expression que l'on cherche à minimiser :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

Le premier facteur est évidement positif car par hypothèse x, y et z sont des nombres positifs. L'exemple de l'introduction montre que le second facteur est positif. On en déduit comme attendu $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$. On a égalité si et seulement si l'un des deux facteurs est égal à 0. Or, $x + y + z = 0$ si et seulement si les trois variables sont égales à 0 et l'exemple en introduction nous enseigne également que $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ si et seulement si les trois variables sont égales. En conclusion, on a égalité si et seulement si $x = y = z$, autrement dit, si et seulement si $a = b = c$ comme désiré.

3. $\Omega_n \Rightarrow \Omega_{2n}$.

   On veut démontrer AM-GM pour $2n$ variables en supposant que l'inégalité est vérifiée pour n variables. L'idée est toute simple. On a $2n$ variables que l'on va regrouper en deux paquets de n variables pour appliquer l'hypothèse d'induction à chacun des paquets et enfin conclure avec AM-GM pour deux variables.

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + \ldots + a_{2n}}{2n} &= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}}_{\geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{n}}_{\geq \sqrt[n]{a_{n+1} \ldots a_{2n}}} \\
&\geq \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}}{2} \\
&\geq \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \cdot \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}} \\
&= \sqrt[2n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{2n}}.
\end{aligned}$$

   La première inégalité est une application de Ω_n aux deux fractions. La seconde inégalité est une application de Ω_2 à la moyenne des deux racines $n$èmes. On a donc établi l'inégalité désirée. Concernant les cas d'égalité, il y a égalité si et seulement si on a égalité pour chacune des inégalités intermédiaires. Tout d'abord, on doit vérifier l'égalité pour les deux applications de Ω_n, c'est-à-dire $a_1 = \ldots = a_n$ et

$a_{n+1} = \ldots = a_{2n}$. De l'application de Ω_2, pour satisfaire l'égalité, on doit avoir $\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}$. Ces deux conditions combinées sont équivalentes à $a_1 = \ldots = a_{2n}$.

4. $\Omega_n \Rightarrow \Omega_{n-1}$.

   On suppose que $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$ pour tout $a_1, \ldots, a_n \geq 0$. On ne s'attend pas à ce qu'il soit très difficile de conclure Ω_{n-1} à partir de Ω_n, car dans Ω_{n-1} on a un degré de liberté en moins par rapport à Ω_n. Pour déduire Ω_{n-1}, il suffit en effet simplement de fixer judicieusement la valeur de a_n dans la relation décrite par Ω_n. Faut-il encore trouver la bonne valeur pour a_n.

   Par symétrie et au vu des expressions qui entrent en jeu, il est naturel de poser $a_n = \sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}}$. Autrement dit, on applique l'inégalité Ω_n pour les variables $(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n = \sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}})$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} &\geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot \sqrt[n-1]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}} \\ &= \sqrt[n-1]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}} \\ &= a_n.\end{aligned}$$

   En amenant tous les termes a_n à droite on obtient

$$\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n} \geq a_n - \frac{a_n}{n} = \frac{n-1}{n} \cdot a_n.$$

   Finalement, en simplifiant par $1/n$, on peut réécrire l'inégalité précédente pour obtenir Ω_{n-1} comme attendu :

$$\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \geq a_n = \sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}}.$$

   Comme nous avons utilisé seulement une instance de Ω_n pour démontrer Ω_{n-1}, l'égalité est satisfaite si et seulement si $a_1 = \ldots = a_{n-1} = \sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}}$. Autrement dit, si et seulement si $a_1 = \ldots = a_{n-1}$ comme désiré.

□

AM-GM n'est valable que pour les nombres positifs. Par exemple, pour $n = 3$, on obtient une contradiction en essayant d'appliquer AM-GM au triplet $(-1, -1, 2)$. En outre, si n est pair, alors la racine n'est pas nécessairement définie lorsque des variables sont négatives.

Exemple 2. *Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres strictement positifs. Montrer que*

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

Solution. C'est un exemple classique de l'application d'AM-GM. Lorsqu'on cherche à montrer qu'une somme de fractions où les numérateurs et les dénominateurs sont algébriquement proches (dans le cas présent, ils coïncident), on peut essayer la méthode suivante. On applique directement AM-GM pour n variables :

$$\frac{\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdots \frac{a_n}{a_1}} = 1.$$

L'inégalité souhaitée suit après multiplication de chaque côté par n. □

Exemple 3. *Soient a, b, c des nombres positifs. Montrer que*

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Solution 1. Dans ce problème, on pourrait commencer par distribuer les parenthèses de gauche. Après simplification, on obtient la nouvelle inégalité

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \geq 6abc.$$

Pour la démontrer, il suffit d'appliquer AM-GM pour $n = 6$ sur le membre de gauche :

$$\begin{aligned} a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b &\geq 6 \cdot \sqrt[6]{a^2b \cdot a^2c \cdot b^2a \cdot b^2c \cdot c^2a \cdot c^2b} \\ &= 6abc, \end{aligned}$$

où, pour s'épargner une fraction, on a multiplié immédiatement par 6. □

Solution 2. Il est également possible, et plus astucieux, d'appliquer AM-GM trois fois sur chacune des trois sommes du membre de gauche dans l'inégalité de départ. On obtient alors

$$\begin{aligned} (a+b)(b+c)(c+a) &\geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} \\ &= 8abc. \end{aligned}$$

Dans les deux solutions, il suit des applications d'AM-GM que les cas d'égalité sont obtenus pour $a = b = c$ uniquement. □

Exemple 4 (IMO 2012, problème 2)**.** *Soient $n \geq 3$ un entier et $a_2, \ldots, a_n$ des nombres strictement positifs tels que $a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Montrer que*

$$(1+a_2)^2 \ldots (1+a_n)^n > n^n.$$

Solution. Ce problème présente deux nouveautés. Premièrement, nous avons une condition sur les variables, à savoir que leur produit est égal à 1. De plus, nous devons démontrer une inégalité stricte. Au fond, cela ne modifie pas foncièrement notre approche.

L'idée derrière la présentation de cet exemple à ce stade du script est de montrer à quel point on ne peut pas évaluer la difficulté d'une inégalité à sa solution. Ce problème était le problème 2 de l'IMO en 2012. En outre, sa solution utilise une idée fondamentale pour le traitement des inégalités : *la décomposition des constantes.*

La première chose qui frappe est l'absence du terme a_1. Pourquoi le problème est-il formulé sans variable a_1 ? La deuxième chose qui interpelle est le manque d'homogénéité dans le membre de gauche, c'est-à-dire que les variables apparaissent avec des degrés (i.e. puissances) différents. Une stratégie viable viserait à faire apparaitre le produit des $n-1$ variables, que l'on rappelle égal à 1, en vue d'obtenir des simplifications. Dans ce but, il faudrait minorer le terme $(1+a_i)^i$ en un terme en a_i seulement (i.e. pas d'autre puissance que le terme linéaire). Cette étape est l'essence même du problème.

L'astuce revient à décomposer le 1 de l'expression $1+a_i$ en une somme de $i-1$ nombres de manière à ce que $1+a_i$ devienne une somme de i termes. On pourrait alors appliquer AM-GM pour i variables. La manière la plus simple est d'écrire $1 = 1/(i-1)+\ldots+1/(i-1)$. On obtient alors

$$\frac{\frac{1}{i-1}+\ldots+\frac{1}{i-1}+a_i}{i} \geq \sqrt[i]{\frac{a_i}{(i-1)^{i-1}}}$$

et donc

$$(1+a_i)^i \geq \frac{i^i}{(i-1)^{i-1}} \cdot a_i$$

avec égalité si et seulement si $a_i = 1/(i-1)$. En multipliant ces inégalités pour chaque indice $i = 2, \ldots, n$, on obtient un produit télescopique

$$(1+a_2)^2 \ldots (1+a_n)^n \geq \underbrace{\frac{2^2}{1} \cdot \frac{3^3}{2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}}_{=n^n} \cdot \underbrace{a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}_{=1} = n^n.$$

Rappelons-nous que nous voulions établir l'inégalité stricte. Dans la dernière inégalité ci-dessus, on a égalité si et seulement si tous les cas d'égalité des $n-1$ applications d'AM-GM sont vérifiés, c'est-à-dire $a_i = 1/(i-1)$ pour tout $i = 2, \ldots, n$. Dans ce cas, le produit des a_i est différent de 1 et donc l'unique cas d'égalité ne peut pas se produire. En conclusion, il n'y a jamais égalité et donc l'inégalité est stricte. $\square$

Que se passe-t-il si certains des a_i se répètent lorsqu'on applique AM-GM sur n variables ? On pourrait alors les regrouper. Supposons que a_1 apparaisse m_1 fois, a_2 apparaisse m_2 fois et ainsi de suite jusqu'à a_k qui apparait m_k fois. Ici les m_i sont des entiers naturels tels que $m_1+\ldots+m_k = n$. On obtient

$$\frac{\overbrace{a_1+\ldots+a_1}^{m_1}+\ldots+\overbrace{a_k+\ldots+a_k}^{m_k}}{m_1+\ldots+m_k} \geq (\underbrace{a_1 \cdot \ldots \cdot a_1}_{m_1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a_k \cdot \ldots \cdot a_k}_{m_k})^{1/n}.$$

Autrement dit

$$\frac{m_1 a_1+\ldots+m_k a_k}{m_1+\ldots+m_k} \geq a_1^{\frac{m_1}{n}} \cdot \ldots \cdot a_k^{\frac{m_k}{n}}.$$

En posant $\omega_i := m_i/n = m_i/(m_1 + \ldots + m_k)$, alors on a $\omega_1 + \ldots + \omega_k = 1$ et

$$\omega_1 a_1 + \ldots + \omega_k a_k \geq a_1^{\omega_1} \cdot \ldots \cdot a_k^{\omega_k}.$$

On obtient la version pondérée d'AM-GM. Cette inégalité est toujours vérifiée si les ω_i sont des nombres réels positifs dont la somme vaut 1. En général, les ω_i sont appelés *poids*. Chaque a_i est associé à son poids et le poids total est 1. Ce résultat est connu en anglais sous le nom de *weighted AM-GM* (weighted = pondéré).

Théorème 2.2 (Weighted AM-GM). *Soient $a_1, \ldots, a_k$ des nombres **positifs** et soient $\omega_1, \ldots, \omega_k$ des nombres réels positifs tels que $\omega_1 + \ldots + \omega_k = 1$. Alors*

$$\omega_1 a_1 + \ldots + \omega_k a_k \geq a_1^{\omega_1} \cdot \ldots \cdot a_k^{\omega_k}.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si $a_i = a_j$ pour toute paire d'indices (i, j) telle que $\omega_i \neq 0$ et $\omega_j \neq 0$.

L'argument précédent donne la preuve pour le cas où les ω_i sont des nombres rationnels. Le cas général requiert des méthodes qui seront présentées à la fin de ces notes.

Exemple 5. *Soit a un nombre positif. Alors*

$$a^5 + 1 \geq a^3 + a^2.$$

Solution. Ce problème semble pouvoir être résolu avec des méthodes analytiques. Pourtant il existe une très jolie preuve qui utilise le weighted AM-GM. Comment sait-on qu'un tel argument existe ? Eh bien, parce que $5 + 0 = 3 + 2$, évidemment. On parle ici des exposants des quatre termes (avec $1 = a^0$).

Il s'agit donc de trouver la bonne constante pour appliquer l'inégalité suivante qui découle du weighted AM-GM. Soit $0 < c < 1$ une constante, alors

$$ca^5 + (1 - c) \geq a^{5c} \cdot 1^{1-c} = a^{5c}.$$

Pour retrouver les deux termes du membre de droite dans l'inégalité de départ, a^3 et a^2, il faut appliquer cette relation pour $c_1 = 3/5$ et $c_2 = 2/5$. Comme $3 + 2 = 5$, alors $c_1 + c_2 = 1$! On obtient

$$\begin{cases} 3/5 \cdot a^5 + 2/5 \geq a^3 \\ 2/5 \cdot a^5 + 3/5 \geq a^2. \end{cases}$$

En additionnant ces deux relations, on obtient, comme désiré, $a^5 + 1 \geq a^3 + a^2$. □

Exemple 6. *Soient a, b, c des nombres strictement positifs tels que $a+b+c = 3$. Montrer que*

$$a^b b^c c^a \leq 1.$$

Solution. C'est un exemple intéressant où les variables se confondent avec les poids. Comment pense-t-on à utiliser un weighted AM-GM dans ce cas ? Eh bien, l'expression avec les puissances ressemble au membre de droite dans le weighted AM-GM. De plus, la condition sur la somme des variables ressemble à la condition sur la somme des poids. Toutefois, la somme n'est pas 1. Or, on observe que

$$a^b b^c c^a \leq 1 \Leftrightarrow (a^b b^c c^a)^{1/3} \leq 1$$

et évidemment $a/3 + b/3 + c/3 = 1$. Appliquons donc le weighted AM-GM à a, b, c avec les poids $b/3, c/3, a/3$:

$$\frac{b}{3} \cdot a + \frac{c}{3} \cdot b + \frac{a}{3} \cdot c \geq a^{b/3} b^{c/3} c^{a/3}.$$

Que l'on peut réécrire sous la forme

$$\frac{ab + bc + ca}{3} \geq (a^b b^c c^a)^{1/3}.$$

Pour conclure, il ne reste plus qu'à montrer que $ab + bc + ca \leq 3$ sous la condition que $a + b + c = 3$. Ici il y a plusieurs chemins possibles (par exemple, comme on le verra plus tard, en *homogénéisant* l'inégalité). On a opté pour l'option suivante.

Lorsqu'une inégalité implique une majoration de l'expression $ab + bc + ca$, il est souvent judicieux d'utiliser l'inégalité $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ que l'on connait bien. Si l'on additionne $2(ab + bc + ca)$ des deux côtés à cette relation, alors on obtient

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2.$$

Dans le problème qui nous concerne, on sait que $a + b + c = 3$. Ainsi, l'inégalité ci-dessus appliquée à cet exemple donne bien

$$3(ab + bc + ca) \leq 9 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 3.$$

$\square$

2.2 Cauchy-Schwarz et son grand frère Hölder

De l'inégalité AM-GM il découle une autre inégalité tout aussi pratique. C'est une inégalité qui s'énonce en général en termes de produit scalaire et de normes de vecteurs. Nous en présentons ici une version algébrique.

Théorème 2.3 (Cauchy-Schwarz, abrégé CS)**.** *Soient $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ des nombres réels (pas nécessairement positifs). Alors*

$$(x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)^2.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si il existe des nombres réels λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1 x_i = \lambda_2 y_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, i.e. les vecteurs $(x_1; \ldots; x_n)$ et $(y_1; \ldots; y_n)$ sont *colinéaires :*

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, l'égalité est vérifiée si et seulement si $x_i y_j = x_j y_i$ pour toute paire d'indices (i,j).

Cauchy-Schwarz est une conséquence d'AM-GM. Dans cette preuve, on profite d'introduire en détail un concept déjà évoqué précédemment : l'homogénéité.

Définition 2.1. Une expression algébrique $A(x_1, \ldots, x_n)$ en plusieurs variables est *homogène de degré k* si pour tout nombre réel θ

$$A(\theta x_1, \ldots, \theta x_n) = \theta^k A(x_1, \ldots, x_n).$$

Une inégalité est *homogène de degré k* si les deux côtés sont des expressions homogènes de degré k.

En d'autres termes, une expression en plusieurs variables est homogène, si en multipliant chaque variable par un même facteur θ, alors l'expression globale est multipliée par une puissance de θ. Par exemple, $x_1^3 + 2x_2^3 - x_1 x_2^2$ est une expression homogène de degré 3 et

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1}$$

est une expression homogène de degré -1. En revanche, $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 1$ et $x_1 + x_2^2$ ne sont pas des expressions homogènes.

Il y a un avantage à travailler avec une inégalité homogène en cela qu'on peut supposer sans perte de généralité qu'un expression homogène en les variables prend une certaine valeur. Ce procédé est appelé *normalisation*. Par exemple, supposons que pour tous les nombres réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$ on désire montrer l'inégalité

$$A(x_1, \ldots, x_n) \geq B(x_1, \ldots, x_n)$$

où A et B sont deux expressions homogènes de degré k. Alors, par homogénéité, cette inégalité est vérifiée pour les variables $(x_1, \ldots, x_n)$ si et seulement si elle l'est pour $(\theta x_1, \ldots, \theta x_n)$ où $\theta > 0$. **Attention !** La positivité de θ est cruciale ici. En effet, par homogénéité des expressions, on a :

$$\begin{gathered} A(\theta x_1, \ldots, \theta x_n) \geq B(\theta x_1, \ldots, \theta x_n) \Leftrightarrow \\ \theta^k \cdot A(x_1, \ldots, x_n) \geq \theta^k \cdot B(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \\ A(x_1, \ldots, x_n) \geq B(x_1, \ldots, x_n). \end{gathered}$$

La dernière simplification est légale seulement parce que $\theta^k > 0$. Cette observation nous permet par exemple de supposer sans perte de généralité que nous avons $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Pourquoi ? Parce qu'il est équivalent de démontrer l'inégalité pour $(x_1, \ldots, x_n)$ et pour

$(x_1/(x_1+\ldots+x_n), \ldots, x_n/(x_1+\ldots+x_n))$, on l'a vu. Et dans le deuxième cas, la somme des variables vaut 1. De même, quitte à multiplier les variables par $2/\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$, on peut supposer sans perte de généralité que $x_1^2+\ldots+x_n^2 = 4$. Ou encore, quitte à multiplier les variables par $1/x_n$, on peut supposer sans perte de généralité que $x_n = 1$.

Vous comprenez donc pourquoi travailler avec une inégalité homogène est pratique. On peut toujours fixer la valeur d'une expression homogène en les variables. En général, on choisit cette expression en fonction de ce qui apparait dans l'inégalité, dans le but de simplifier l'inégalité qu'on souhaite démontrer. **Attention !** Utiliser l'homogénéité pour soulager une inégalité n'est jamais un pas décisif vers la solution, cela permet simplement d'y voir plus clair.

Lorsqu'on dit d'une inégalité qu'elle est *standard*, on entend en général qu'elle est en particulier homogène. D'une certaine manière, si les grandeurs avaient des unités de mesure associées, alors l'homogénéité garantirait la validité (d'un point de vue physique) de l'expression ; d'où le côté naturel et donc standard de l'homogénéité.

Évidemment, lorsque vous appliquez une normalisation dans une solution, on attend de vous que vous justifiez entièrement une telle manipulation, comme ci-dessus ou comme dans la démonstration qui suit.

Démonstration de Cauchy-Schwarz. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est homogène de degré 2 en les variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. De plus, dans ce cas spécifiquement, elle est aussi homogène de degré 2 en les variables $x_1, \ldots, x_n$ seulement. C'est-à-dire que si l'on multiplie les x_i (seulement) par $\theta > 0$, alors l'inégalité est inchangée.

On remarque que si $x_1^2+\ldots+x_n^2 = 0$, alors tous les x_i sont nuls et l'inégalité est trivialement vérifiée. Si $x_1^2+\ldots+x_n^2 \neq 0$, alors, quitte à multiplier tous les x_i par $1/\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$, on peut supposer sans perte de généralité que $x_1^2+\ldots+x_n^2 = 1$. On doit donc désormais montrer que

$$y_1^2+\ldots+y_n^2 \geq (x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2$$

sous la condition que $x_1^2+\ldots+x_n^2 = 1$. En observant cette nouvelle inégalité, on remarque qu'elle est toujours homogène de degré 2 en les variables $y_1, \ldots, y_n$ cette fois. On peut donc à nouveau supposer sans perte de généralité que $y_1^2+\ldots+y_n^2 = 1$. L'inégalité devient

$$1 \geq x_1y_1+\ldots+x_ny_n.$$

On a considérablement simplifié la forme de l'inégalité. La conclusion à l'aide d'AM-GM est maintenant limpide. En effet, on sait que $x_iy_i \leq (x_i^2+y_i^2)/2$. Ainsi, on a bien

$$\begin{aligned} x_1y_1+\ldots+x_ny_n &\leq \frac{x_1^2+y_1^2}{2}+\ldots+\frac{x_n^2+y_n^2}{2} \\ &= \frac{\overbrace{x_1^2+\ldots+x_n^2}^{=1}}{2}+\frac{\overbrace{y_1^2+\ldots+y_n^2}^{=1}}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Concernant les cas d'égalité, l'application d'AM-GM nous dit que l'on a égalité si et seulement si $x_i = y_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Or, il faut se rappeler à ce stade que l'on a fait une supposition concernant la valeur de la somme des carrés des variables. Cela revient à multiplier les variables par l'inverse de la racine carrée de la dite somme. Ce coefficient doit donc être répercuté dans les cas d'égalités. On a donc bien égalité si et seulement si $x_i = \lambda y_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Exemple 7 (AM-HM)**.** *Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels* ***strictement positifs****. Alors*

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Solution. Le membre de droite de l'inégalité est appelé la *moyenne harmonique* (HM pour *harmonic mean*) des a_i. Cet exemple est une nouvelle inégalité sur les moyennes. Il existe une quatrième moyenne que l'on appelle moyenne quadratique (QM pour *quadratic mean*). On propose de démontrer les inégalités qui existent entre les différentes moyennes en exercice (voir la feuille d'exercices).

On peut réécrire AM-HM de la manière suivante :

$$(a_1 + \ldots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Cela commence à ressembler à du Cauchy-Schwarz. Comme les a_i sont des nombres réels positifs, on peut introduire $b_i := \sqrt{a_i}$. L'inégalité devient

$$(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \left(\left(\frac{1}{b_1} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{b_n} \right)^2 \right) \geq n^2.$$

Il s'agit à présent d'une directe application de CS. En effet, par CS on a directement, comme désiré,

$$(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \left(\left(\frac{1}{b_1} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{b_n} \right)^2 \right) \geq \left(b_1 \cdot \frac{1}{b_1} + \ldots + b_n \cdot \frac{1}{b_n} \right)^2 = n^2.$$

$\square$

Un détail mérite attention à ce stade : on peut se passer d'introduire les nouvelles variables b_i, mais il faut faire attention à une chose. Lorsqu'on applique CS à un produit de deux parenthèses, **il faut s'assurer que chaque élément des deux sommes est positif**, parce que dans l'énoncé originel de CS, ces éléments sont des carrés et donc des nombres positifs. En d'autres termes, on peut réécrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi :

Théorème 2.4 (Cauchy-Schwarz, *bis*)**.** *Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des nombres réels **positifs**. Alors*

$$(a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n) \geq \left(\sqrt{a_1 b_1} + \ldots + \sqrt{a_n b_n}\right)^2.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si les vecteurs $(a_1; \ldots; a_n)$ et $(b_1; \ldots; b_n)$ sont colinéaires.

L'exemple suivant est un cas typique où l'application de Cauchy-Schwarz est une stratégie à envisager. L'exemple lui-même est une inégalité pratique que vous pourrez réutiliser à l'occasion.

Exemple 8 (Nesbitt)**.** *Soient a, b, c des nombres **strictement positifs**. Alors*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si $a = b = c$.

Solution. La solution présentée ici est une application d'école de CS lorsqu'on cherche à minorer une somme de fractions. Elle doit être envisagée systématiquement lorsqu'on travaille avec une somme de fractions. L'idée est de multiplier le membre de gauche par la somme des produits des numérateurs avec les dénominateurs. Ensuite, on applique CS à ce produit. Rappelez-vous de ce schéma de *denominators clearing*, c'est un classique.

Par CS, comme toutes les variables sont positives, on a

$$(a(b+c) + b(c+a) + c(a+b))\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geq (a+b+c)^2$$

et donc

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Il suffit donc à présent de montrer que $(a+b+c)^2/2(ab+bc+ca) \geq 3/2$ et on a terminé. Cette inégalité est équivalente à $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$. On l'a vu en introduction, cette dernière inégalité est vérifiée pour tout a, b, c avec égalité si et seulement si $a = b = c$. Le cas d'égalité de l'application de CS étant plus général, on a bien uniquement $a = b = c$ comme cas d'égalité. □

Exemple 9. *Soient x, y, z, w quatre nombres réels tels que $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$. Déterminer la valeur maximale que peut prendre l'expression $x + 2y + 2z + 4w$.*

Solution. Dans ce genre de problèmes d'optimisation, après avoir déterminé la valeur du maximum recherché, il y a systématiquement deux choses à montrer. Premièrement, il faut prouver qu'il s'agit bien d'une borne supérieure, c'est-à-dire que l'expression $x +$

$2y + 2z + 4w$ est bien toujours plus petite ou égale que cette valeur. Deuxièmement, il faut montrer que cette borne peut être atteinte pour un certain quadruplet de valeurs (i.e. il existe au moins un cas d'égalité) sans quoi ce n'est pas un vrai maximum.

Comme on l'a vu dans les exemples jusqu'ici, les valeurs extrêmes sont souvent atteintes lorsque toutes les variables sont égales. Dans ce cas, à cause des coefficients différents dans l'expression à maximiser, le cas d'égalité est moins évident. Il n'est donc pas clair *a priori* sur quelle valeur du maximum on devrait spéculer.

Toutefois, la condition sur la somme des carrés fait penser au membre de gauche de Cauchy-Schwarz. Il suffit peut-être d'introduire les coefficients dans la deuxième parenthèse du membre de gauche ! On aurait alors

$$(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)(1^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2) \geq (x + 2y + 2z + 4w)^2$$

et donc

$$|x + 2y + 2z + 4w| \leq 5.$$

Observez que l'expression $x+2y+2z+4w$ peut être négative et donc en prenant la racine carrée on ne doit pas oublier la valeur absolue. Or, un nombre est toujours plus petit ou égal que sa valeur absolue. On a donc $x + 2y + 2z + 4w \leq 5$ pour tout x, y, z, w.

Pour conclure que 5 est bien le maximum recherché, il faut encore trouver un cas d'égalité. De l'application de CS, on sait qu'il y a égalité si et seulement si

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2} = \frac{w}{4}.$$

Or, ces quatre variables doivent aussi satisfaire $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$. En résolvant ce système, on obtient la solution $(x, y, z, w) = (1/5, 2/5, 2/5, 4/5)$. Le maximum de 5 est donc bel et bien atteint. $\square$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est le cas particulier d'une inégalité plus générale qui porte le nom de Hölder. À cause du grand nombre de variables qui interviennent, il est difficile d'écrire son énoncé de manière limpide.

Théorème 2.5 (Hölder)**.** *Soit $m \geq 1$ un entier que l'on appelle* le degré de l'inégalité*. Soit x_{ij} une collection de nombres réels (pas nécessairement positifs) où $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, m$. Alors*

$$\prod_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (x_{ij})^m \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} x_{ij} \right)^m .$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si $x_{ij}x_{lk} = x_{ik}x_{lj}$ pour tout $i, l = 1, \ldots, n$ et pour tout $j, k = 1, \ldots, m$. C'est-à-dire, si et seulement s'il existe des nombres réels

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x_{21} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} = \ldots = \lambda_m \begin{pmatrix} x_{m1} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix},$$

i.e. si les m vecteurs $(x_{11}; \ldots; x_{1n}), \ldots, (x_{m1}; \ldots; x_{mn})$ sont colinéaires ou si l'un est nul.

Au lieu de retenir cette formule bêtement par cœur, on peut déjà commencer par comprendre pourquoi le cas $m = 2$ redonne exactement Cauchy-Schwarz ou comprendre le cas $m = 3$ et ses applications. En pratique, le degré 3 s'avère utile. Le cas général de l'inégalité d'Hölder est plus rarement utilisé mais demeure toutefois un résultat fondamental. Si le degré est $m = 3$, l'inégalité de Hölder s'écrit de la manière suivante :

Théorème 2.6 (Hölder degré 3)**.** *Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n$ des nombres réels (pas nécessairement positifs). Alors*

$$(x_1^3 + \ldots + x_n^3)(y_1^3 + \ldots + y_n^3)(z_1^3 + \ldots + z_n^3) \geq (x_1 y_1 z_1 + \ldots + x_n y_n z_n)^3.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si les trois vecteurs $(x_1; \ldots; x_n), (y_1; \ldots; y_n)$ et $(z_1; \ldots; z_n)$ sont colinéaires ou si l'un est nul.

Si Cauchy-Schwarz est une bonne stratégie lorsqu'on cherche à minimiser une somme de fractions, parce qu'elle permet de se débarrasser des dénominateurs, l'inégalité de Hölder de degré m s'applique à l'identique lorsque la somme de fractions fait intervenir des racines $(m-1)$èmes. Illustrons ce principe avec un fameux problème d'IMO.

Exemple 10 (IMO 2001, problème 2)**.** *Soient a, b, c des nombres réels positifs. Alors*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Solution. On cherche à minimiser une somme de fractions faisant intervenir des racines carrées. On va donc tenter d'appliquer Hölder avec degré 3. On procède de la manière suivante. On multiplie le carré du membre de gauche avec la somme des produits des numérateurs avec les dénominateurs sans la racine. C'est-à-dire, on considère l'expression suivante :

$$\big(a(a^2+8bc) + b(b^2+8ca) + c(c^2+8ab)\big)\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)^2.$$

Par Hölder, comme toutes les variables qui interviennent sont positives, cette expression est plus grande ou égale à $(a+b+c)^3$. Autrement dit, on a

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+24abc}}.$$

Il suffit donc de montrer que $(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc$ pour conclure. Si l'on développe le cube de gauche, alors les termes a^3, b^3 et c^3 se simplifient. Il reste

$$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b \geq 6abc.$$

Cette inégalité, on l'a déjà vu dans un exemple précédent, est vérifiée (il s'agit là d'un simple AM-GM). $\square$

2.3 Muirhead, le bulldozer

Intéressons-nous de plus près aux inégalités entre expressions polynomiales (pas de racine, pas de sinus,etc.), symétriques et homogènes et regardons de plus près une liste d'inégalités que l'on a déjà établies :

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca, \\ a^3+b^3+c^3 \geq 3abc, \\ a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b \geq 6abc, \\ a^5+1 \geq a^3+a^2. \end{cases}$$

Toutes ces relations, mis à part la dernière, sont des inégalités entre deux expressions polynomiales symétriques en a, b, c (excepté pour la dernière) et homogènes de degré 2, respectivement 3 et 3. Intuitivement, on remarque que "les plus grands exposants" dominent les exposants plus distribués. Cette intuition, pour autant qu'on en définisse les concepts, se formalise en un théorème que l'on doit à Muirhead. Pour l'énoncer, on a besoin de la notion de majoration des exposants.

Définition 2.2. Soit $p=(p_1,\ldots,p_n)$ et $q=(q_1,\ldots,q_n)$ deux vecteurs de nombres réels (pas forcément positifs). On dit que p *majore* (ou *domine*) q et on note $p \succeq q$ si

1. $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$ et $q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_n$,
2. $p_1+\ldots+p_n = q_1+\ldots+q_n$,
3. $p_1+\ldots+p_k \geq q_1+\ldots+q_k$ pour tout $k=1,\ldots,n-1$.

Par exemple, $(5,1) \succeq (3,2)$ et $(2,0,0) \succeq (1,1,0)$ ou encore $(5,3,-1) \succeq (4,2,1)$ et $(1,0,\ldots,0) \succeq (1/n,\ldots,1/n)$.

Pour pouvoir énoncer Muirhead proprement, on introduit encore le concept de *somme symétrique*. Il s'agit d'une notation qui nous épargne parfois d'écrire de longues expressions. La somme symétrique d'une expression telle que a^2b ou a^3bc^2 est la somme des toutes les expressions obtenues par permutation des variables. **Attention !** Une somme symétrique d'un terme à n variables distinctes contient toujours $n!$ termes, car il y $n!$ permutations possibles. Ce concept est plus clairement expliqué à l'aide d'un exemple. Pour trois variables, par exemple

$$\begin{cases} \sum_{sym} abc = abc+acb+bac+bca+cab+cba = 6abc, \\ \sum_{sym} a^2b = a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b, \\ \sum_{sym} ab = ab+ac+ba+bc+ca+cb = 2(ab+bc+ca). \end{cases}$$

Il ne faut pas confondre les sommes symétriques avec les *sommes cycliques* que l'on rencontre parfois dans la littérature. La somme cyclique d'une expression n'additionne que les expressions obtenues par permutations **cycliques** des variables. En particulier, la somme cyclique d'une expression en n variables contient n termes. Par exemple,

$$\begin{cases} \sum_{cyc} abc = abc + bca + cab = 3abc, \\ \sum_{cyc} a^2b = a^2b + b^2c + c^2a, \\ \sum_{cyc} ab = ab + bc + ca. \end{cases}$$

Si $a_1, \dots, a_n$ sont des nombres réels **positifs**, alors étant donné un vecteur de nombres réels $p = (p_1, \dots, p_n)$, on note

$$[p] := \sum_{sym} a_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{p_n}.$$

Par exemple, $[(2,0,0)] = 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$ et $[(1/2, 1/2)] = 2\sqrt{a_1 a_2}$. Le théorème de Muirhead s'énonce facilement avec cette notation.

Théorème 2.7 (Muirhead, a.k.a. Bunching)**.** *Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels **positifs** et p, q deux vecteurs de nombres réels (pas nécessairement positifs). Alors*

$$p \succeq q \Rightarrow [p] \geq [q].$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si $p = q$ ou si tous les a_i sont identiques.

On peut appliquer Muirhead pour montrer certaines des inégalités déjà établies. Par exemple,

$$(2,0,0) \succeq (1,1,0) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$
$$(3,0,0) \succeq (2,1,0) \succeq (1,1,1) \Rightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq \sum_{sym} a^2 b \geq 6abc,$$
$$(5,0) \succeq (3,2) \Rightarrow a^5 + b^5 \succeq a^3 b^2 + b^3 a^2.$$

On peut également voir AM-GM comme une conséquence de Muirhead :

$$\begin{aligned} (1,0,\dots,0) \succeq (1/n, \dots, 1/n) &\Rightarrow (n-1)! \cdot (a_1 + \ldots + a_n) \geq n! \cdot a_1^{1/n} \ldots a_n^{1/n} \\ &\Rightarrow \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}. \end{aligned}$$

Muirhead est un outil extrêmement puissant. Étant donnée une inégalité polynomiale symétrique et homogène, on peut toujours essayer de tout développer, ramener l'inégalité sous la forme de sommes symétriques et tenter d'appliquer Muirhead. Bien sûr, cela ne fonctionne pas tout le temps. Cependant, l'outil est si puissant qu'il en devient ennuyeux. L'époque des inégalités résolubles par gros bras (i.e. Muirhead) est révolue, du moins à l'IMO. Voyons néanmoins quelques exemples.

Exemple 11 (USA 1997)**.** *Soient a, b, c trois nombres réels strictement positifs. Alors*

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}.$$

Solution. L'inégalité est polynomiale, symétrique et homogène. On peut donc tenter d'appliquer Muirhead. Pour ce faire, il faut tout multiplier pour se débarrasser des fractions. On passe immédiatement en notation avec les sommes symétriques. **Attention !** Chaque somme contient six termes, on doit donc rajouter des coefficients pour compenser les termes excédentaires. On obtient

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{sym}(a^3+b^3+abc)(a^3+c^3+abc)abc\leq(a^3+b^3+abc)(b^3+c^3+abc)(c^3+a^3+abc).$$

En développant, on obtient

$$\sum_{sym}a^7bc+3a^4b^4c+4a^5b^5c+a^3b^3c^3\leq\sum_{sym}a^3b^3c^3+2a^6b^3+3a^4b^4c+2a^5b^2c^2+a^7bc$$

et après simplification, il reste $\sum_{sym}a^7b^2\geq\sum_{sym}a^5b^2c^2$. Cette inégalité est vérifiée parce que $(7,2,0)\succeq(5,2,2)$. $\square$

Exemple 12. *Soient $a_1,\ldots,a_n$ des nombres strictement positifs tels que $a_1\cdot\ldots\cdot a_n=1$. Alors*

$$a_1^2+\ldots+a_n^2\geq a_1+\ldots+a_n.$$

Solution. L'inégalité est bien polynomiale et symétrique, mais elle n'est pas homogène. En effet, le côté gauche est homogène de degré 2 alors que le côté droit est homogène de degré 1. L'astuce est *d'homogénéiser* l'inégalité à l'aide de la condition en multipliant à droite par un terme polynomial, symétrique et homogène de degré 1, c'est-à-dire $(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)^{1/n}$. Les deux côtés sont alors homogènes de degré 2. On obtient

$$a_1^2+\ldots+a_n^2\geq(a_1\ldots a_n)^{1/n}(a_1+\ldots+a_n)$$

et en notation avec les sommes symétriques

$$\sum_{sym}a_1^2\geq\sum_{sym}a_1^{\frac{n+1}{n}}a_2^{\frac{1}{n}}\ldots a_n^{\frac{1}{n}}.$$

Or, $(2,0,\ldots,0)\succeq((n+1)/n,1/n,\ldots,1/n)$, donc l'inégalité précédente est vérifiée par Muirhead. $\square$

Pour le dernier exemple, on va compléter l'inégalité de Muirhead avec un petit lemme extrêmement pratique.

Lemme 2.8. *Soient $a_1,\ldots,a_n$ des nombres réels positifs et $p=(p_1,\ldots,p_n),q$ deux vecteurs de nombres réels.*

1. *Si $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, alors $[(p_1, \ldots, p_n)] = [(p_1 - r, \ldots, p_n - r)]$ pour tout nombre réel r.*
2. *Si $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \geq 1$, alors $[(p_1, \ldots, p_n)] \geq [(p_1 - r, \ldots, p_n - r)]$ pour tout nombre réel r.*
3. $\frac{[p]+[q]}{2} \geq \left[\frac{p+q}{2}\right]$.

Les deux premiers points sont immédiats à condition d'écrire explicitement les sommes. Le point 3 est une conséquence d'AM-GM et laissé en exercice.

Exemple 13 (IMO 2005, problème 3)**.** *Soient a, b, c des nombres réels strictement positifs tels que $abc \geq 1$. Alors*

$$\frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \geq 0.$$

Solution. L'inégalité n'est pas homogène et il n'est pas clair *a priori* comment homogénéiser une telle inégalité. On va donc essayer de se rabattre sur notre lemme. On commence par tout développer (eh oui, il faut suer pour gagner). On obtient

$$\begin{aligned}[(9,0,0)] + 4[(7,5,0)] + [(5,2,2)] + [(5,5,5)] \geq [(6,0,0)] + [(5,5,2)] + 2[(5,4,0)] \\ + 2[(4,2,0)] + [(2,2,2)].\end{aligned}$$

Toute la subtilité de l'exercice revient donc à estimer les bons termes à gauche avec les bons termes à droite. C'est à cette étape qu'il faut un brin d'intuition et d'expérience. L'idée générale est toujours d'utiliser le plus grand terme à gauche pour majorer le plus grand terme à droite.

Par Muirhead, on a $[(9,0,0)] \geq [(7,1,1)]$. Par le point 2 du lemme, comme $abc \geq 1$, avec $r = 1$, on a $[7,1,1] \geq [6,0,0]$. Donc

$$[(9,0,0)] \geq [(6,0,0)].$$

Par Muirhead, on a immédiatement

$$[(7,5,0)] \geq [(5,5,2)].$$

De même, par Muirhead on a $[(7,5,0)] \geq [(6,5,1)]$ et par le point 2 du lemme, avec $r = 1$, $[(6,5,1)] \geq [5,4,0]$. Donc

$$2[(7,5,0)] \geq 2[(5,4,0)].$$

On arrive à l'étape un peu plus délicate. On va montrer que

$$[(7,5,0)] + [(5,2,2)] \geq 2[(4,2,0)].$$

A l'aide du point 3 du lemme, on a $[(7,5,0)] + [(5,2,2)] \geq 2[(6,7/2,1)]$. On ne peut pas conclure immédiatement ni avec Muirhead ou avec le point 2 que $[(6,7/2,1)] \geq [(4,2,0)]$.

On doit essayer de combiner les deux. L'idée est de chercher un nombre réel r tel que $(6-r)+(7/2-r)+(1-r)=4+2$. Un tel r est donnée par $3/2$. Donc, on applique d'abord le point 2 du lemme avec $r=3/2$ pour obtenir $[(6,7/2,1)] \geq [(9/2,2,-1/2)]$, puis Muirhead nous donne $[(9/2,2,-1/2)] \geq [(4,2,0)]$.

Finalement, le point 2 du lemme avec $r=3$ implique que

$$[(5,5,5)] \geq [(2,2,2)].$$

En sommant ces cinq inégalités, on obtient le résultat désiré. □

3 L'ordre avant le désordre

Dans le chapitre précédent, les résultats s'appuient essentiellement sur le fait qu'il n'y a pas de carrés négatifs. Les inégalités présentées dans ce chapitre ne découlent pas de la positivité des carrés. On peut donc les regarder comme une famille d'outils de nature différente qui permettent de résoudre certaines inégalités insensibles aux résultats précédents.

3.1 Les suites ordonnées à la sauce Tchébychev

Le résultat central de cette section est très intuitif. Sa preuve d'ailleurs n'est qu'une formalisation de notre intuition. L'idée est la suivante : pour maximiser, il faut assembler les plus grands ensemble. Si vous êtes autorisés à piocher trois, deux et une pièce dans trois sacs qui contiennent des pièces de cinq, deux et un franc, alors vous maximisez votre gain en prenant trois pièces de cinq francs, deux pièces de deux francs et une pièce d'un franc.

Théorème 3.1 (Suites ordonnées). *Soient $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ une suite ordonnée de nombres réels (pas nécessairement positifs). Soit $y_1, \ldots, y_n$ une deuxième suite de nombres réels et soit $z_1, \ldots, z_n$ un réarrangement de la suite $y_1, \ldots, y_n$. Alors la somme*

$$x_1z_1 + x_2z_2 + \ldots + x_nz_n$$

est maximale si $z_1 \geq z_2 \geq \ldots \geq z_n$ (i.e. les deux suites sont ordonnées dans le même sens) et est minimale si $z_1 \leq z_2 \leq \ldots \leq z_n$ (i.e. les deux suites sont ordonnées dans le sens inverse).

Démonstration. Supposons que les suites (x_i) et (z_i) ne sont pas ordonnées dans le même sens. C'est-à-dire qu'il existe une paire d'indices (j,k) telle que $x_j \geq x_k$ et $z_j \leq z_k$. La somme des produits vaut

$$s_1 := x_1z_1 + \ldots + x_jz_j + \ldots + x_kz_k + \ldots + x_nz_n.$$

On va montrer qu'en réarrangeant la suite (z_i) (i.e. en mettant de l'ordre) via une permutation des termes z_j et z_k, alors on obtient une plus grande somme. Soit s_2 la nouvelle somme :

$$s_2 := x_1z_1 + \ldots + x_jz_k + \ldots + x_kz_j + \ldots + x_nz_n.$$

Comme seulement deux termes varient entre les sommes s_1 et s_2, la différence entre s_2 et s_1 vaut

$$s_2 - s_1 = x_jz_k + x_kz_j - x_jz_j - x_kz_k = \underbrace{(x_j - x_k)}_{\geq 0}\underbrace{(z_k - z_j)}_{\geq 0} \geq 0.$$

On conclut comme désiré que $s_2 \geq s_1$. En conclusion, plus on réordonne la suite (z_i) pour qu'elle soit ordonnée comme (x_i), plus on augmente la valeur de la somme $\sum x_iz_i$. Au final, lorsque les deux suites seront ordonnées de la même manière, la somme sera donc maximale, comme attendu. Le deuxième cas se démontre de manière similaire. $\square$

Pour gagner en clarté, on introduit la notation suivante :

$$\begin{bmatrix} (x_n) \\ (y_n) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ y_1 & \ldots & y_n \end{bmatrix} := x_1y_1 + \ldots + y_ny_n.$$

Un concept important dans le contexte des suites ordonnées est une idée déjà évoquée précédemment : la symétrie.

Définition 3.1. Une expression algébrique $A(x_1, \ldots, x_n)$ en plusieurs variables est *symétrique* si pour toute permutation $y_1, \ldots, y_n$ des nombres $x_1, \ldots, x_n$, l'expression A est inchangée :

$$A(x_1, \ldots, x_n) = A(y_1, \ldots, y_n).$$

Une inégalité est *symétrique* si les deux côtes sont des expressions symétriques et si toutes les conditions imposées dans la donnée sur les variables sont également symétriques.

Par exemple, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ et $x_1 + x_2 + x_3 + 1$ sont des expressions symétriques en x_1, x_2, x_3. En revanche, l'expression $x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1$ n'est pas symétrique.

Lorsqu'on travaille avec une inégalité symétrique, permuter les variables ne change rien. On peut donc sans perte de généralité supposer que les variables sont ordonnées comme bon nous semble. Tout de suite un exemple pour mieux comprendre.

Exemple 14. *Les inégalités suivantes sont vérifiées.*

1. *soient x, y, z des nombres réels, alors $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$,*
2. *soient $a, b, c \geq 0$, alors $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$.*

Solution. Voyons une inégalité après l'autre :

1. On connait déjà bien cette inégalité. On a vu comment la démontrer en faisant apparaître des carrés. On peut également la démontrer à l'aide d'AM-GM, de Cauchy ou encore en appliquant directement Muirhead. Voyons une preuve avec les suites ordonnées.

   L'inégalité étant symétrique, on peut sans perte de généralité supposer que $x \geq y \geq z$. Les suites x, y, z et x, y, z sont identiques et donc, en particulier, ordonnées dans le même sens. La suite y, z, x est un réarrangement de la suite x, y, z. On a donc, par le théorème des suites ordonnées,

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ x & y & z \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{bmatrix} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

2. Cette inégalité est intéressante, car elle n'est pas symétrique. Muirhead n'est donc d'aucune utilité ici, nonobstant une certaine ressemblance. De plus, on ne peut pas arbitrairement fixer l'ordre des variables, sans perdre en généralité. Mais cela n'est pas directement nécessaire.

   Comme les variables sont positives et que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur les nombres positifs, on a
$$a \geq b \Rightarrow a^2 \geq b^2.$$

   En particulier, les suites a, b, c et a^2, b^2, c^2 sont ordonnées dans le même sens (mais pas nécessairement monotones). Alors, on a bien, par le théorème des suites ordonnées,

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

□

Exemple 15. *Soient $n \geq 2$ un nombre entier et $a_1, \ldots, a_n$ des nombres strictement positifs dont la somme est notée $s := a_1 + \ldots + a_n$. Alors*

$$\frac{a_1}{s - a_1} + \ldots + \frac{a_n}{s - a_n} \geq \frac{n}{n - 1}.$$

Solution. Cette fois, l'inégalité est symétrique. On peut donc supposer sans perte de généralité que $a_1 \geq \ldots \geq a_n$. Observer que, et cette idée est récurrente,

$$a_i \geq a_j \Leftrightarrow s - a_i \leq s - a_j \Leftrightarrow \frac{1}{s - a_i} \geq \frac{1}{s - a_j}.$$

On a donc $1/(s - a_1) \geq \ldots \geq 1/(s - a_n)$. Ce problème est un peu plus délicat que le précédent, car une seule utilisation du théorème des suites ordonnées ne suffit pas. On va l'appliquer $n - 1$ fois, en permutant cycliquement le rôle des variables a_i. Plus précisément, comme les suites (a_i) et $(1/(s-a_i))$ sont ordonnées dans le même sens, le théorème des suites ordonnées nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{s-a_1} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_n} &\geq \frac{a_1}{s-a_2} + \frac{a_2}{s-a_3} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_1}, \\
\frac{a_1}{s-a_1} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_n} &\geq \frac{a_1}{s-a_3} + \frac{a_2}{s-a_4} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_2}, \\
&\vdots \\
\frac{a_1}{s-a_1} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_n} &\geq \frac{a_1}{s-a_n} + \frac{a_2}{s-a_1} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_{n-1}}.
\end{aligned}$$

En sommant ces inégalités, tout en sommant en une étape les fractions avec les même dénominateurs à droite, on obtient

$$(n-1)\left(\frac{a_1}{s-a_1} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_n}\right) \geq \frac{s-a_1}{s-a_1} + \ldots + \frac{s-a_n}{s-a_n} = n.$$

La conclusion désirée suit. □

On peut généraliser la méthode de résolution de l'exemple précédent. L'inégalité que l'on obtient alors porte le nom de Tchébychev.

Théorème 3.2 (Tchébychev)**.** *Soient $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ deux suites de nombres réels (pas nécessairement positifs).*

1. *Si les deux suites sont ordonnées dans le même sens, alors*

$$\frac{x_1y_1 + \ldots + x_ny_n}{n} \geq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}.$$

2. *Si les deux suites sont ordonnées dans le sens inverse, alors*

$$\frac{x_1y_1 + \ldots + x_ny_n}{n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}.$$

Démonstration. Supposons que les suites soient ordonnées dans le même sens. Quitte à réordonner les variables, par symétrie, on suppose que $x_1 \geq \ldots \geq x_n$ et $y_1 \geq \ldots \geq y_n$. Comme dans l'exemple précédent, on applique l'inégalité des suites ordonnées n fois en permutant cycliquement les variables y_i :

$$\begin{aligned}
x_1y_1 + \ldots + x_ny_n &= x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n, \\
x_1y_1 + \ldots + x_ny_n &\geq x_1y_2 + x_2y_3 + \ldots + x_ny_1, \\
&\vdots \\
x_1y_1 + \ldots + x_ny_n &\geq x_1y_n + x_2y_1 + \ldots + x_ny_{n-1}.
\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à sommer ces n relations. On remarque que chaque produit $x_i y_j$ apparait exactement une fois dans le membre de droite. Il s'agit donc du développement de $(x_1 + \ldots + x_n)(y_1 + \ldots + y_n)$. On obtient ainsi

$$n(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n) \geq (x_1 + \ldots + x_n)(y_1 + \ldots + y_n)$$

et la conclusion suit. □

Exemple 16. *Soient a, b, c des nombres strictement positifs tels que $abc = 1$. Alors*

$$\frac{a-1}{\sqrt{b+c}} + \frac{b-1}{\sqrt{c+a}} + \frac{c-1}{\sqrt{a+b}} \geq 0.$$

Solution. Dans ce problème, on remarque tout d'abord le manque d'homogénéité. On penche donc plutôt pour une méthode du troisième chapitre. En revanche, l'inégalité est symétrique, donc on peut supposer que $a \geq b \geq c$.

La deuxième chose qui interpelle est la présence de signes moins. Rien n'empêche donc les numérateurs d'être négatifs. En général, on préfère se passer de termes dont on ne peut pas contrôler le signe. Pour s'en débarrasser, on peut passer à droite tous ces signes négatifs. L'inégalité devient

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}}.$$

Observer que si $a \geq b \geq c$, alors $a+b \geq a+c \geq b+c$. Comme la fonction racine $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante, on a également $\sqrt{a+b} \geq \sqrt{a+c} \geq \sqrt{b+c}$. En prenant les inverses, on obtient finalement

$$\frac{1}{\sqrt{b+c}} \geq \frac{1}{\sqrt{c+a}} \geq \frac{1}{\sqrt{a+b}}$$

On peut donc appliquer Tchébychev pour minorer le membre de gauche. On a

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}}\right).$$

Ainsi, il ne reste plus qu'à montrer que $(a+b+c)/3 \geq 1$ et on a terminé. Or, il reste la condition $abc = 1$ que l'on n'a pas encore utilisée. On reconnait immédiatement AM-GM :

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = 1.$$

Et voilà, une inégalité de plus! □

Exemple 17. *Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres strictement positifs. Alors*

$$a_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{a_n} \geq (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}}.$$

Solution. Tiens, des exponentielles ! Comme souvent dans les problèmes qui font intervenir des produits d'exponentielles, il est judicieux d'appliquer un logarithm-boxe. On suppose ici que vous êtes familiers avec les propriétés de base des logarithm-boxes. Par exemple, la fonction $x \mapsto \log x$ est croissante (ici log désigne le logarithm-boxe naturel). On peut donc réécrire l'inégalité de départ comme

$$a_1 \log a_1 + \ldots + a_n \log a_n \geq \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)(\log a_1 + \ldots + \log a_n).$$

Cette inégalité, de par son apparence, suggère fortement Tchébychev. Par symétrie, on peut supposer que $a_1 \geq \ldots \geq a_n$. Comme la fonction logarithm-boxe est croissante, alors on a $\log a_1 \geq \ldots \geq \log a_n$. L'inégalité ci-dessus est donc une application directe de Tchébychev. □

3.2 Schur, l'exception

Voilà une inégalité qui sort du lot. Comme on va le voir, malgré homogénéité et symétrie, elle est insensible à Muirhead. C'est un résultat à part qu'il faut garder au coin de sa tête lorsque les autres méthodes ne fonctionnent pas.

Théorème 3.3 (Schur). *Soient a, b, c des nombres **positifs** et p un nombre strictement positif. Alors*

$$a^p(a-b)(a-c) + b^p(b-c)(b-a) + c^p(c-a)(c-b) \geq 0.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si $a = b = c$ ou si deux variables sont égales et la troisième est nulle.

Démonstration. Par symétrie, on peut supposer que $a \geq b \geq c$. On peut réécrire l'inégalité de Schur sous la forme

$$\underbrace{(a-b)}_{\geq 0}\underbrace{(a^p(a-c) - b^p(b-c))}_{\geq 0} + c^p\underbrace{(a-c)}_{\geq 0}\underbrace{(b-c)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Cette inégalité est clairement vérifiée car toutes les parenthèses de gauche sont positives. On vous laisse contrôler les cas d'égalité en exercice. □

Avec la notation présentée dans le contexte de l'inégalité de Muirhead, on peut réécrire Schur de la manière suivante :

$$[(p+2,0,0)] + [(p,1,1)] \geq 2[(p+1,1,0)].$$

On remarque qu'il n'est pas possible d'utiliser Muirhead, ni le lemme associé (Lemme 2.8), pour prouver Schur. C'est là ce qui fait sa singularité parmi toutes les inégalités.

Le cas particulier $p = 1$ de Schur s'écrit :

Théorème 3.4 (Cas spécial de Schur)**.** *Soient a, b, c des nombres **positifs**. Alors*

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si $a = b = c$ ou si deux variables sont égales et la troisième est nulle.

Exemple 18. *Soient a, b, c trois nombres positifs tels que $a + b + c = 1$. Alors*

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq \frac{1}{4}.$$

Solution. Pour attaquer ce genre de problème, comme on l'a vu, il est bon d'homogénéiser l'inégalité. En multipliant par $(a + b + c)^3 = 1$ à droite, on obtient

$$4a^3 + 4b^3 + 4c^3 + 24abc \geq (a + b + c)^3.$$

Après développement et simplifications, on retrouve exactement Schur pour $p = 1$:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b.$$

□

4 Convexe ou concave, telle est la question

Cette section a pour but de présenter quelques nouvelles inégalités aux origines plus analytiques. La notion qui intervient ici est la convexité et la concavité d'une fonction. En quelques mots, une fonction est concave lorsque son graphe a une forme de bosse (colline) et une fonction est convexe si son graphe a une forme de creux (colline renversée). En particulier, si f est convexe, alors $-f$ est concave et *vice versa*. Rappelez-vous que multiplier une fonction par -1 revient à effectuer une symétrie d'axe horizontal sur son graphe (les bosses deviennent ainsi des creux).

Les notions de convexité et concavité d'une fonction f peuvent également s'énoncer à l'aide de la dérivée première f' ou de la dérivée seconde f'' de f. On part du principe que toutes les fonctions que l'on va rencontrer sont dérivables (au moins deux fois). Toutefois, les notions de convexité et de concavité ont un sens même pour des fonctions non-dérivables. Plus précisément :

Définition 4.1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Une fonction $f \colon I \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* si l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :

1. $f(ax + by) \leq af(x) + bf(y), \forall x, y \in I$ et $\forall a, b \in [0, 1]$ tels que $a + b = 1$,
2. $f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z), \forall x, z \in I$,
3. $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$.

Une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est dite *concave* si l'une des trois conditions suivantes est satisfaite (on change simplement le sens des inégalités, rien de fou) :

1. $f(ax+by) \geq af(x)+bf(y), \forall x,y \in I$ et $\forall a,b \in [0,1]$ tels que $a+b=1$,
2. $f(x) \leq f(z)+f'(z)(x-z), \forall x,z \in I$,
3. $f''(x) \leq 0, \forall x \in I$.

On précise bien que l'une des trois conditions est suffisante pour garantir la convexité/concavité. De plus, si l'une des trois conditions est vérifiée, alors les trois le sont.

Ces conditions peuvent paraître très abstraites à première vue. En réalité, elles sont simplement la formulation mathématique d'une idée toute simple. Prenons la première condition :

$$f(ax+by) \leq af(x)+bf(y).$$

Supposons que $x<y$. Cette inégalité signifie que la partie du graphe de la fonction f qui relie le point $(x, f(x))$ au point $(y, f(y))$ passe en dessous du segment de ligne droite qui relie ces deux même points (voir Figure 1). En effet, comme $a+b=1$ et $a,b \in [0,1]$, le point $ax+by$ est un point qui se situe entre x et y sur l'axe réel horizontal, i.e.

$$x \leq ax+by \leq y.$$

De même, $af(x)+bf(y)$ représente un point qui se situe entre $f(x)$ et $f(y)$ sur l'axe vertical. Les rapports de distance garantissent bien que le point d'abscisse $ax+by$ et d'ordonnées $af(x)+bf(y)$ se situe sur le segment qui relie $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ (c'est une application du théorème de Thalès). Dans le cas d'une fonction concave, inversement, le segment se situe au-dessous de l'arc du graphe.

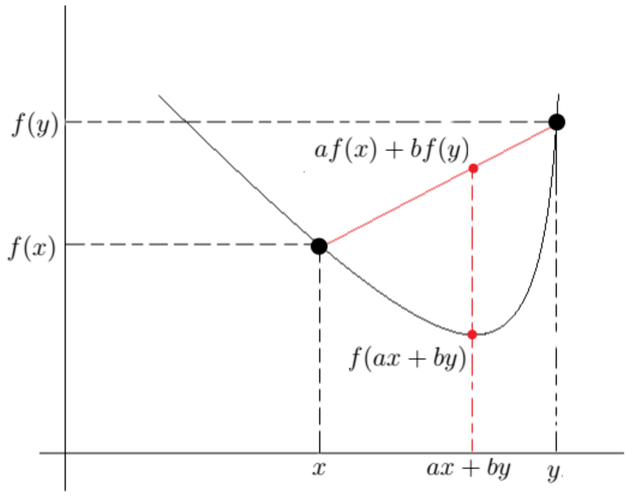

FIGURE 1 : Cas d'une fonction convexe. En rouge, le segment qui relie les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$. Le segment se situe au-dessus de l'arc du graphe en noir.

La deuxième condition dans la définition de la convexité stipule que le graphe de la fonction f se situe au-dessus de la droite tangente au graphe en un point (voir Figure 2). En effet, la tangente au graphe de f au point $(z, f(z))$ est la droite d'équation

$$y = f(z) + f'(z)(x - z).$$

Rappelez-vous que la dérivée $f'(z)$ de f en z donne la pente de la tangente en ce point. Or, f se situe au-dessus de la tangente en $(z, f(z))$ si pour tout x dans I, on a

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z).$$

La fonction f est convexe si cette propriété est vérifiée pour tout z dans I. De manière similaire, f est concave si son graphe se situe toujours au-dessous des tangentes.

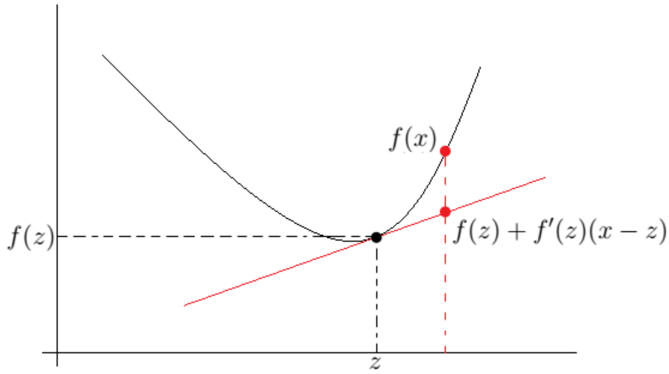

FIGURE 2 : Cas d'une fonction convexe. En rouge, la tangente au graphe de la fonction f au point $(z, f(z))$. Le graphe de la fonction se situe en-dessus de la tangente.

La dernière condition est une condition analytique sur la dérivée seconde. Géométriquement, une dérivée seconde de signe constant signifie que la courbure du graphe de la fonction ne change jamais de signe, c'est-à-dire, le graphe de la fonction "tourne" toujours dans le même sens. En général, étant donnée une fonction, cette condition est plus facile à vérifier.

En pratique, le plan est donc le suivant. On détermine si une fonction est convexe ou concave à l'aide de sa dérivée seconde, puis, le cas échéant, on en déduit des estimations sur la fonction à l'aide des deux premières propriétés.

Récapitulons ces digressions sur la convexité et la concavité dans le théorème suivant. Il est formulé de manière à être utile dans le contexte des olympiades, mais il ne s'agit au fond que de trois formulations équivalentes d'un même concept.

Théorème 4.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction* ***convexe*** *(i.e. $f'' \geq 0$). Alors les deux inégalités suivantes sont vérifiées :*

1. (Jensen) *soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres dans l'intervalle I et $0 \leq \omega_1, \ldots, \omega_n \leq 1$*

des nombres réels positifs, inférieurs à 1, tels que $\omega_1 + \ldots + \omega_n = 1$, alors

$$f(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n) \leq \omega_1 f(x_1) + \ldots + \omega_n f(x_n).$$

On a égalité si et seulement si $x_i = x_j$ pour toute paire d'indices (i, j) telle que $\omega_i \neq 0$ et $\omega_j \neq 0$ ou si f est linéaire (i.e. $f'' = 0 \Leftrightarrow f(x) = ax + b$) entre $\min\{x_i\}$ et $\max\{x_i\}$.

2. (Tangent line trick) *soient x, z dans I, alors*

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z).$$

On a égalité si et seulement si $x = z$ ou si f est linéaire entre x et z.

*Les inégalités inversées sont vérifiées lorsque f est **concave** (i.e. $f'' \leq 0$).*

Dans l'inégalité de Jensen, si on choisit les poids égaux, i.e. $\omega_i = 1/n, \forall i$, alors l'inégalité s'écrit comme suit.

Théorème 4.2 (Cas particulier de Jensen)**.** *Soit $f \colon I \to \mathbb{R}$ une fonction **convexe**. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres dans l'intervalle I. Alors*

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

On a égalité si et seulement si $x_1 = \ldots = x_n$ ou si f est linéaire.

L'inégalité de Jensen est une version plus générale de la première caractérisation de la convexité/concavité que l'on a vue. Tout comme le weighted AM-GM généralise le AM-GM standard. En parlant du weighted AM-GM, que l'on n'avait pas démontré en toute généralité précédemment, eh bien, c'est une conséquence de Jensen. Comment ça ? La fonction logarithm-boxe $f \colon x \mapsto \log x$ est concave parce que $f''(x) = -1/x^2 < 0$. Par Jensen, on a donc

$$\log(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n) \geq \omega_1 \log x_1 + \ldots + \omega_n \log x_n$$

lorsque les x_i sont strictement positifs. La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est croissante, on peut donc l'appliquer à l'inégalité précédente pour obtenir

$$\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n \geq x_1^{\omega_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\omega_n}.$$

C'est exactement l'énoncé du weighted AM-GM.

Exemple 19. *Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Alors*

$$\sqrt{a + b - c} + \sqrt{b + c - a} + \sqrt{c + a - b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Solution. Cet exemple propose une condition géométrique sur les variables. Comment retranscrit-on cette condition en termes algébriques ? Autrement dit, quelles conditions doivent satisfaire les trois nombres positifs a, b, c pour qu'il existe un triangle (peut-être dégénéré) dont les longueurs des cotés valent précisément ces trois nombres ?

L'argument est simple. Supposons que $a \geq b \geq c \geq 0$. Commençons par tracer le coté de longueur a (le plus long en premier). Traçons ensuite un cercle de rayon b à l'une des extrémités et un cercle de rayon c à l'autre extrémité. Le triangle recherché existe si et seulement si les deux cercles s'intersectent. Comme $b \leq a$ et $c \leq a$, les deux cercles s'intersectent si et seulement si $b + c \geq a$. Cette condition est appelée l'*inégalité du triangle*. En résumé,

$$a, b, c \text{ côtés d'un triangle} \Leftrightarrow a + b \geq c,\ \ b + c \geq a \text{ et } c + a \geq b.$$

Observer que les trois inégalités de droite combinées impliquent en particulier que les valeurs a, b et c sont positives. Si l'une des trois inégalités est une égalité, alors le triangle est dégénéré (i.e. les sommets sont alignés). Autrement dit,

$$a, b, c \text{ côtés d'un triangle non-dégénéré} \Leftrightarrow a + b > c,\ \ b + c > a \text{ et } c + a > b.$$

Dans notre problème, les trois inégalités du triangle garantissent par exemple que les argument des racines sont positifs. Si l'on souhaite se débarrasser de la condition géométrique sur les variables, il existe une substitution, appelée *substitution de Ravi*, qui nous permet de réécrire l'inégalité sans condition. La substitution est la suivante

$$a, b, c \text{ côtés d'un triangle} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x + y, \\ b = y + z, \\ c = z + x, \end{cases}$$

pour trois nombres **positifs** x, y, z. En effet, en résolvant le système de droite, on obtient, par exemple $x = 1/2(a - b + c)$. Ainsi, en supposant que a, b et c sont les côtés d'un triangle, alors x est positif. L'implication retour est immédiate. Il existe un moyen plus géométrique de comprendre les transformations de Ravi illustré sur la figure suivante.

Retour à notre exemple. Appliquons les transformations de Ravi. On doit donc à présent montrer que pour x, y, z des nombres positifs, on a

$$\sqrt{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \leq \sqrt{x + y} + \sqrt{y + z} + \sqrt{z + x}.$$

La fonction $f \colon x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur les nombres réels positifs. En effet, $f''(x) = -1/(4x\sqrt{x}) < 0$. Avec Jensen pour deux variables et $\omega_1 = \omega_2 = 1/2$, on a donc

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} \leq \sqrt{\frac{x + y}{2}}.$$

En sommant ces inégalités pour $(x, y), (y, z)$ et (z, x), on obtient le résultat désiré. On n'a évidement pas "besoin" de Jensen pour montrer cette dernière inégalité (on peut simplement élever au carré, par exemple, et conclure avec AM-GM). Toutefois, si on remplaçait

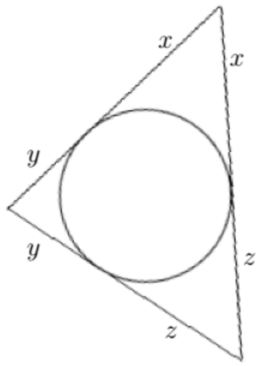

FIGURE 3 : Dans un triangle, chaque sommet est à égale distance des deux points de tangence des côtés correspondants avec le cercle inscrit. C'est une conséquence, par exemple, du théorème de la puissance d'un point appliqué aux sommets.

les racines carrées par des racines quatrièmes (ou n'importe quelle autre fonction concave sur les nombres réels positifs), alors le problème serait toujours vrai et on ne passerait pas à côté de Jensen cette fois. □

Exemple 20 (IMO 2001, problème 2)**.** *Soient a, b, c des nombres réels strictement positifs. Alors*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Démonstration. On reprend ce fameux problème que l'on a déjà résolu avec Hölder. Voyons à présent une solution avec Jensen. L'idée est que la fonction $f\colon x \mapsto 1/\sqrt{x}$ est convexe sur les nombres positifs. En effet, $f''(x) = 3/(4x^2\sqrt{x}) > 0$.

Comment alors appliquer Jensen concrètement ? Pour cela on a besoin de trois poids dont la somme vaut 1. L'idée est la suivante, comme l'inégalité est homogène, on peut sans perte de généralité supposer que $a+b+c=1$. Les variables a, b, c vont ainsi elles-mêmes jouer le rôle des poids ! On a donc

$$a \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+8bc}} + b \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2+8ca}} + c \cdot \frac{1}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \frac{1}{\sqrt{a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)}}.$$

Ainsi, il ne reste plus qu'à montrer que, pour des nombres strictement positifs a, b, c tels que $a+b+c=1$, alors

$$1 \geq a(a^2+8bc) + b(b^2+8ca) + c(c^2+8ab).$$

Cette inégalité est relativement simple (plus de racine, ni de fraction). Par contre, elle n'est plus homogène. On peut y remédier. En homogénéisant, i.e. en multipliant à gauche par $1 = (a+b+c)^3$, puis en simplifiant, il reste

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \geq 6abc.$$

On sait que cette inégalité est vérifiée. □

Le dernier exemple de ce script est dédié au trick de la tangente. C'est une inégalité pratique en soi, souvent méconnue, mais qui peut s'avérer utile.

Exemple 21 (Bernoulli)**.** *Soient r et x deux nombres **positifs**. Alors*

1. $(1+x)^r \geq 1+rx$, *si* $r \geq 1$,
2. $(1+x)^r \leq 1+rx$, *si* $r \leq 1$.

On a égalité si et seulement si $r=1$, $r=0$ ou $x=0$.

Solution. La fonction $f\colon x \mapsto (1+x)^r$ est convexe sur les nombres positifs si $r \geq 1$ et concave si $r \leq 1$. En effet, $f''(x) = r(r-1)(1+x)^{r-2}$ et donc le signe de f'' dépend uniquement du signe de $r-1$. En appliquant le tangent line trick en $x=0$, on obtient tout de suite l'inégalité désirée. Par exemple, pour $r \geq 1$, comme $f(0)=1$ et $f'(0)=r$, on a

$$(1+x)^r \geq 1 + r(x-0) = 1+rx.$$

$\square$