Équations fonctionnelles

Thomas Huber, Arnaud Maret

Actualisé: 1er février 2017
vers. 2.0.0

Table des matières

1 Généralités et introduction

Bienvenue dans le monde des équations fonctionnelles ! Ce monde est peuplé de créatures appelées *équations fonctionnelles*. Pour certaines personnes, les équations fonctionnelles sont juste des problèmes comme les autres. D'autres les craignent. Ton aventure dans le fabuleux monde des équations fonctionnelles est sur le point de démarrer ! Un monde de rêves et d'aventures avec les équations fonctionnelles t'attend ! Allons-y !

Avant de vouloir comprendre ce qu'est une équation fonctionnelle, il faut déjà comprendre ce qu'est une *fonction*.

1.1 Comprendre la notion de *fonction*

Essentiellement, une fonction f décrit une relation entre un ensemble de départ, disons $\mathcal{A}$, et un ensemble d'arrivée, disons $\mathcal{B}$. Elle associe à chaque élément a dans $\mathcal{A}$ un unique élément b dans $\mathcal{B}$ appelé *image de a par f*. On a l'habitude de noter $b = f(a)$; de cette manière, on voit tout de suite dans la notation que b est l'image de a par f.

On utilise la notation suivante pour définir une fonction :

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{A} &\to \mathcal{B} \\ a &\mapsto f(a). \end{aligned}$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

est une fonction qui à chaque nombre réel x associe le nombre réel $f(x) = x^2 + 1$. Dans ce cas, on dispose d'une formule arithmétique simple qui permet de calculer l'image de x.

Dans d'autres cas, on ne connaît pas de formules simples pour calculer la valeur exacte de l'image d'un élément de l'ensemble de départ. Par exemple, considérons la fonction suivante :

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto p(n), \end{aligned}$$

où $p(n)$ est le $n^{\text{ème}}$ nombre premier. Pour cette fonction, on doit se contenter de la notation $p(n)$ pour parler de l'image de n par manque de formules plus explicites.

Anticipons déjà une remarque concernant les équations fonctionnelles. Les fonctions auxquelles vous aurez affaire seront toutes ou presque définies par une formule explicite "jolie". Cependant, à nouveau, ce n'est pas une propriété des fonctions, et beaucoup d'entre elles ne peuvent pas être décrites par une formule explicite. Ne prenez donc pas l'habitude de marginaliser les fonctions "pathologiques".

Le détail-clef dans la notion de fonction est l'unicité de l'image. Par exemple, si l'on associe à chaque entier n tous ses différents diviseurs, on obtient une relation de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ qui n'est pas une fonction.

Par contre, rien n'interdit qu'un élément de l'ensemble d'arrivée soit l'image de plusieurs éléments de l'ensemble de départ. Par exemple, si la fonction avec laquelle on travaille est $f(x) = x^2 + 1$, alors 2 est à la fois l'image de 1 et de -1 par f.

De même, alors qu'on exige que chaque élément de l'ensemble de départ ait une image dans l'ensemble d'arrivée, il n'est pas requis que chaque élément de l'ensemble d'arrivée soit l'image d'un élément de l'ensemble d'arrivée. Par exemple, si l'on reprend la fonction

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + 1, \end{aligned}$$

alors $0 \in \mathbb{R}$ n'est l'image d'aucun élément, car il n'existe pas de x dans $\mathbb{R}$ tel que $0 = x^2+1$.

Dans les problèmes qui vont suivre, la majorité des fonctions seront des fonctions d'une variable. C'est-à-dire des fonctions qui envoient un nombre sur un autre nombre. Néanmoins, certains problèmes concernent des fonctions de plusieurs variables qui envoient un uplet de nombres vers un nombre ou un autre uplet de nombres. Par exemple,

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{Q} \\ (a, b) &\mapsto f(a, b) = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

est une fonction qui envoie un couple d'entiers dont le second membre est strictement positif vers le quotient du premier par le deuxième.

A première vue, la notion de fonction peut paraître très abstraite. Une manière de visualiser la chose est d'entrevoir une fonction comme un ensemble de flèches dont les origines sont les éléments d'un même ensemble et dont l'extrémité sont certains éléments d'un autre ensemble, en se rappelant que chaque élément de l'ensemble de départ est l'origine d'une unique flèche.

Pour les fonctions d'une variable réelle, il existe une manière géométrique de les décrire que l'on appelle le *graphe* de la fonction. Il s'agit de tracer dans un système d'axes tous les points $(x, f(x))$ pour tout choix de x dans l'ensemble de départ. Les propriétés que nous énoncerons plus tard pourront être interprétées de manière géométrique (i.e. visuelle).

Avec ces quelques éléments, la notion de fonction devrait devenir plus intuitive chez ceux qui ne sont pas habitués à travailler avec. D'autres propriétés des fonctions seront définies plus tard. Passons maintenant à quelques considérations générales sur les équations fonctionnelles.

1.2 Qu'est-ce qu'une équation fonctionnelle ?

Une *équation fonctionnelle* est une équation dont l'inconnue est une fonction. En général, lorsqu'on parle d'équations, on s'intéresse à trouver les valeurs qui satisfont une égalité de deux expressions algébriques. Ici, on se propose se chercher les expressions algébriques qui font que l'équation est satisfaite pour certaines valeurs données. C'est d'une certaine manière le problème inverse.

Par exemple, pour la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, nous avons clairement

$$f(x)f(y) = f(xy),$$

quelque soit le choix de x et de y dans $\mathbb{R}$. En effet, pour toute paire de nombres x, y, nous avons $f(x)f(y) = x^2y^2 = (xy)^2 = f(xy)$ d'après les propriétés des puissances. Vous remarquerez que toute fonction puissance $x \mapsto x^a$ est également une solution de cette équation fonctionnelle.

Un problème standard d'équation fonctionnelle a la forme suivante :

Exemple 1. *(IMO 92) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout x, y dans $\mathbb{R}$*

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2.$$

On montrera plus tard que l'unique solution de cette équation est la fonction identité $x \mapsto x$. Vous pouvez déjà vous convaincre que cette fonction est bien une solution de l'équation.

Il existe toutefois des équations fonctionnelles très variées. Si elles ont généralement deux variables, elles peuvent aussi en avoir une ou plusieurs. Il peut s'agir d'équations simples ou de systèmes d'équations avec une ou plusieurs fonctions. Les fonctions ne sont pas toujours définies pour tous les nombres réels, le domaine de définition est souvent $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ ou n'importe quel autre ensemble de nombres tel que $\mathbb{R}^+$ par exemple.

Souvent on assimile à une équation fonctionnelle un problème qui traite de fonctions et dont la solution requiert quelques calculs et autres manipulations d'expressions. Voici quelques exemples d'énoncés qui diffèrent de la formulation standard, mais que l'on classe comme équation fonctionnelle :

Exemple 2. *(IMO 93) Décider s'il existe une fonction $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(1) = 2$ et telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$*

(a) $f(f(n)) = f(n) + n$

(b) $f(n) < f(n+1)$.

Exemple 3. *(IMO 02) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous les nombres réels x, y, z, t*

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz).$$

Le dernier exemple montre que f peut également avoir plusieurs arguments.

Exemple 4. *(IMO 81) La fonction $f(x, y)$ satisfait les équations suivantes pour tout $x, y \geq 0$:*

$$\begin{aligned} f(0, y) &= y + 1, \\ f(x+1, 0) &= f(x, 1), \\ f(x+1, y+1) &= f(x, f(x+1, y)). \end{aligned}$$

Déterminer $f(4, 1981)$.

Après ce survol, vous devriez mieux voir à quoi ressemble une formulation typique de problème. Une toute autre question est maintenant de savoir comment on résout un tel problème. Pour les équations fonctionnelles classiques, souvent on identifie très vite une fonction qui est solution et on est également convaincu que cette solution est unique. La difficulté majeure reste de le démontrer. Il n'y a que très peu de procédés standards que l'on peut appliquer. Le plus souvent on procède par tâtonnement, on joue avec l'équation jusqu'à ce que d'autres informations applicables soient révélées. Le plus important pour résoudre de telles équations fonctionnelles est l'expérience. Avec un peu d'entraînement, on développe quelques bons réflexes et une intuition efficace. Ce script devrait vous permettre d'acquérir cette expérience. Il contient beaucoup d'exemples avec des solutions détaillées et beaucoup d'exercices qui vous permettront de vous améliorer.

1.3 Schéma classique de rédaction

Si les procédés standards pour résoudre une équation fonctionnelle sont rares, il existe néanmoins un schéma standard pour la rédaction des solutions.

Une solution devrait toujours commencer par la phrase : “Soit f une solution de l'équation.” Souvent on omet cette phrase par habitude.

Ensuite, il s'agit de déterminer des propriétés de plus en plus contraignantes à propos de f jusqu'à pouvoir en déduire sa forme explicite. Par exemple, “... et donc nécessairement $f(x) = x^2 + 1$ pour tout réel x.”

Finalement, une solution complète se termine toujours par la vérification que la ou les solutions trouvées précédemment satisfont bel et bien l'équation de départ. Souvent on oublie cette étape, car on la juge trop triviale. Cependant, il s'agit d'une étape clef de la solution et certains points s'envoleront si la vérification est omise. On ne le répétera jamais assez, **toujours vérifier que vos fonctions solutions satisfont l'équation de départ** !

2 Méthodes élémentaires de résolution

2.1 Substitutions

Cette section traite de la méthode de résolution la plus naturelle, les *substitutions.* Si une fonction f satisfait une équation donnée pour tous x, y dans $\mathbb{R}$ par exemple, alors en particulier cette identité doit rester valable pour n'importe quel choix des valeurs pour x et y.

2.1.1 Substitutions de base

En général, lorsqu'on s'attaque à une équation fonctionnelle, on commence toujours par quelques substitutions de base. On utilise souvent cette méthode pour déterminer l'image par f de certaines valeurs-clefs ; souvent $f(0)$ ou $f(1)$. Une suite de substitutions astucieuses suffit parfois à résoudre un problème. Même certains problèmes compliqués ! Voyons tout de suite un premier exemple.

Exemple 5. *Trouver toutes les fonctions* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telles que pour tout* x, y *dans* $\mathbb{R}$

$$f(xy) = xf(x) + yf(y).$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
Vous allez gentiment vous rendre compte que pour les problèmes avec une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, essayer de déterminer la ou les valeurs possibles de $f(0)$ est souvent judicieux. Dans notre cas, on peut commencer par substituer $x = 0$ et $y = 0$ dans l'équation. On obtient après calcul : $f(0) = 0$. Ainsi, toute fonction qui est une solution au problème ci-dessus doit satisfaire $f(0) = 0$.

Essayons à présent de substituer uniquement $y = 0$ et de garder x comme variable libre. On obtient

$$xf(x) = f(0) = 0.$$

Cette équation est toujours satisfaite pour tout réel x. Ainsi, on obtient que pour tout réel x, soit $x = 0$, soit $f(x) = 0$, et donc on en déduit que $f(x) = 0$ lorsque $x \neq 0$. Comme on sait déjà que $f(0) = 0$, on conclut que f est nécessairement la fonction nulle, i.e. $f(x) = 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

La dernière étape consiste à vérifier que la fonction nulle satisfait bien l'équation de départ. En effet, on a trivialement

$$0 = x \cdot 0 + y \cdot 0,$$

pour tout x, y dans $\mathbb{R}$.

On a donc bel et bien montré que cette équation fonctionnelle admet une unique solution, qui est la fonction nulle.

□

Voyons encore un exemple de base.

Exemple 6. *Trouver toutes les fonctions* $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *telles que pour tous* x, y *dans* $\mathbb{R}^+$

$$xf(xy) = f(y).$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
Comme la valeur 0 n'est pas autorisée ici, la première substitution naturelle à essayer est $x = 1$ et/ou $y = 1$. On voit que la substitution $x = 1$ mène à une trivialité et donc est inintéressante. Essayons donc de poser $y = 1$ dans l'équation de base. On obtient

$$xf(x) = f(1)$$

pour toute valeur de x dans $\mathbb{R}^+$. Comme x n'est jamais 0, alors on peut diviser les deux côtés de l'équation par x pour obtenir

$$f(x) = \frac{f(1)}{x}. \tag{1}$$

Il est important de réaliser à ce stade, surtout lorsque l'on débute avec les équations fonctionnelles, que $f(1)$ n'est rien d'autre qu'une constante. Dans certains exemples, comme dans celui-ci, on ne pourra pas déterminer la valeur exacte de $f(1)$ (ou de $f(0)$ pour d'autres exemples), car l'équation admet plus d'une solution et toutes ces solutions ne prennent pas nécessairement la même valeur en 1.

Il faut simplement interpréter l'équation (1) de la manière suivante : si f est une solution du problème de base, alors on a

$$f(x) = \frac{c}{x},$$

où c est une constante dans $\mathbb{R}^+$.

On vérifie à présent que quel que soit le choix de c dans $\mathbb{R}^+$, alors la fonction $x \mapsto c/x$ est une solution du problème de base. En effet, pour tous x, y dans $\mathbb{R}^+$ nous avons bien

$$x \cdot \frac{c}{xy} = \frac{c}{y}.$$

□

Dans cet exemple, on a montré que l'équation fonctionnelle admet une infinité de solutions qui sont données par toutes les fonctions de la forme $x \mapsto c/x$, où c est une constante réelle positive.

Regardons un dernier exemple un peu plus subtil, mais dont la résolution n'emploie que des substitutions de base. Cette équation était le problème 9 du tour final en 2005.

Exemple 7. *(Tour final 2005) Trouver toutes les fonctions* $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *telles que pour tout* x, y *dans* $\mathbb{R}^+$

$$f\left(yf(x)\right)(x+y) = x^2\left(f(x)+f(y)\right).$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
À nouveau, nous travaillons dans $\mathbb{R}^+$, donc nous allons plutôt nous orienter vers la valeur 1 pour les premières substitutions. Essayons ainsi, naturellement, de substituer $x = y = 1$ dans l'équation de base. Nous obtenons après calculs :

$$f\left(f(1)\right) = f(1). \tag{2}$$

Nous ne pouvons donc pas immédiatement trouver la valeur de $f(1)$. Par contre, nous avons établi une propriété intéressante à propos de $f(1)$. Il est bon à présent de ne pas baisser les bras et de poursuivre les substitutions pour obtenir plus d'informations à propos de $f(1)$. Rappelons ici que $f(1)$ n'est rien d'autre qu'une constante, ainsi, il est parfaitement légal (et même souhaitable !) de tenter des substitutions de la forme $(x, y) = (1, f(1))$, $(x, y) = (f(1), 1)$ ou encore $(x, y) = (f(1), f(1))$ et d'utiliser la propriété (2) pour simplifier le résultat.

Dans notre cas, substituer $x = f(1)$ et $y = 1$ donne, en utilisant la propriété (2) pour simplifier les doubles f et en factorisant l'équation résultante,

$$\left(f(1)-1\right)\left(2f(1)+1\right) = 0.$$

On en déduit que $f(1) = 1$ ou $f(1) = -1/2$. Comme le domaine d'arrivée est $\mathbb{R}^+$, la deuxième possibilité est à exclure. On a donc établi $f(1) = 1$. Dans l'idée d'utiliser cette nouvelle égalité, tentons simplement de substituer $x = 1$. Nous obtenons après réarrangement des termes

$$yf(y) = 1.$$

Comme y est supposé non-nul, nous pouvons diviser par y pour obtenir $f(y) = 1/y$. Il ne reste plus qu'à vérifier que la fonction $x \mapsto 1/x$ satisfait l'équation de départ. Nous avons clairement

$$\frac{1}{y\frac{1}{x}}(x+y) = \frac{x^2}{y} + x = x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

□

2.1.2 Substitutions fonctionnelles

Nous avons résolu les exemples précédents en substituant des constantes à la place de nos variables libres x et y. Rappelons qu'en général les équations sont satisfaites quelle que soit la valeur des variables. Cela nous permet de substituer non seulement des valeurs déterminées à la place de x et de y, mais aussi de substituer une expression en y à la place de x par exemple. Voyons tout de suite un exemple pour illustrer ces propos.

Exemple 8. *Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{R}$*

$$x + 2f(x) + f\left(f(y) - x\right) = y.$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
Comme à notre habitude, commençons par quelques substitutions de base. Avec $x = 0$, nous obtenons

$$f\left(f(y)\right) = y - 2f(0).$$

Ce genre d'égalité est toujours intéressant à établir, car il permet de simplifier les doubles f.

Le terme le plus compliqué de l'équation de base est $f\left(f(y) - x\right)$. Il peut donc être judicieux d'essayer de s'en débarrasser. Le moyen le plus facile de fixer ce terme est de substituer $x = f(y)$. Il est important à ce stade de comprendre pourquoi une telle substitution est licite. L'équation est vérifiée quelque soit la valeur de x, indépendamment du choix de la valeur de y. En particulier, elle reste vraie si la valeur de x dépend de celle de y.

On obtient ainsi, après simplification des doubles f à l'aide de la formule ci-dessus,

$$f(y) = -y + 3f(0).$$

Posons encore $y = 0$ dans cette dernière équation pour obtenir $f(0) = 3f(0)$ et donc $f(0) = 0$. L'équation ci-dessus devient donc $f(y) = -y$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que la fonction $x \mapsto -x$ satisfait l'équation de base. En effet, on vérifie facilement que

$$x - 2x - \left((-y) - x\right) = y.$$

□

Voyons à présent un exemple un peu moins standard. Il s'agit d'une *inéquation fonctionnelle*. Pas de panique ! Le procédé pour résoudre un tel problème reste fondamentalement le même.

Exemple 9. *Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{R}$*

$$f(x + y) \geq f(xy).$$

Solution. Soit f une solution de l'inéquation ci-dessus.
Il est toujours bon de commencer un problème d'équation fonctionnelle en identifiant les fonctions solutions. Pour ce faire, passez en revue les fonctions usuelles (les fonctions constantes $x \mapsto c$, les fonctions linéaires $x \mapsto ax + b$, en particulier $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$, $x \mapsto \pm x^2$, $x \mapsto c/x$, etc).

Dans cet exemple, seules les fonctions constantes dans la liste ci-dessus satisfont l'inéquation. On va donc essayer de montrer que les solutions sont les fonctions constantes. Commençons naturellement par substituer $y = 0$. On obtient

$$f(x) \geq f(0)$$

pour tout x dans $\mathbb{R}$. Ainsi, si l'on arrivait à établir l'inégalité inverse, c'est-à-dire $f(x) \leq f(0)$, pour tout x dans $\mathbb{R}$, alors on pourrait conclure l'égalité $f(x) = f(0)$ et on aurait terminé.

Essayons donc de faire apparaitre un $f(0)$ du côté gauche du signe $\geq$. La substitution naturelle est donc $y = -x$. Elle mène à

$$f(0) \geq f\left(-x^2\right).$$

Le problème à présent est que les nombres réels ne peuvent pas tous s'exprimer comme "moins le carré d'un autre". Ainsi, on peut conclure l'égalité $f(t) = f(0)$ à ce stade seulement pour les t qui peuvent s'écrire $t = -x^2$ pour un certain x dans $\mathbb{R}$. Il est facile de voir dans ce cas que si $t \leq 0$, alors $t = -\left(\sqrt{-t}\right)^2$ et que cette même expression n'est pas définie pour $t > 0$. Étant donné $t \leq 0$, on pose $x = \sqrt{-t}$ dans l'équation ci-dessus et on déduit que $f(0) \geq f(t)$. Combiné avec notre premier résultat, on a

$$f(t) = f(0)$$

pour tout $t \leq 0$ dans $\mathbb{R}$.

Une autre substitution qu'il est toujours bon d'envisager est le classique $x = y$. Dans ce cas, cela donne

$$f(2x) \geq f\left(x^2\right).$$

Rappelons que l'on souhaite établir $f(0) \geq f(t)$ pour $t > 0$. On va donc tenter d'utiliser l'inégalité ci-dessus pour faire apparaître $f(t)$ du côté droit du signe $\geq$. Poser $x = \sqrt{t}$ ne nous mène à rien, car on ne connait rien du terme $f\left(2\sqrt{t}\right)$. En revanche, et là est toute la subtilité, poser $x = -\sqrt{t}$ change tout, car l'on sait que $f\left(-2\sqrt{t}\right) = f(0)$, étant donné que $-2\sqrt{t} < 0$. On a établi ainsi que pour $t > 0$,

$$f(0) = f\left(-2\sqrt{t}\right) \geq f(t).$$

De la double inégalité et des résultats précédents, on peut donc finalement conclure $f(t) = f(0)$ pour tout t dans $\mathbb{R}$.

On vérifie aisément que toutes les fonctions constantes $x \mapsto c$ satisfont l'inégalité de départ. $\square$

Prenons un dernier exemple. Ce problème a été proposé au tour final en 2004 en tant que problème 4. La solution se fait en trois parties, la plus subtile étant la deuxième. Cet exemple est assez fondamental à mon goût et je vous conseille de passer un peu de temps à l'étudier.

Exemple 10. *(Tour final 2004) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{R}$,*

$$f\left(xf(x) + f(y)\right) = f(x)^2 + y.$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
La première partie, comme très souvent, consiste à calculer la valeur de $f(0)$. Vous pouvez omettre cette partie dans un premier temps et y revenir quand on aura abordé le chapitre sur la *surjectivité*. Le schéma paraîtra alors beaucoup plus clair.

La substitution $x = y = 0$ nous donne

$$f(f(0)) = f(0)^2. \tag{3}$$

En substituant $x = 0$ et $y = -f(0)^2$, on obtient $f(f(-f(0)^2)) = 0$. Autrement dit, si l'on pose $a := f(-f(0)^2)$, alors $f(a) = 0$. Ce genre d'argument paraîtra beaucoup plus naturel après avoir abordé la surjectivité.

Posons à présent, $x = y = a$ pour obtenir $f(0) = a$. Appliquons f des deux côtés pour obtenir $f(f(0)) = f(a) = 0$. Combiné avec (3), on obtient $f(0)^2 = 0$ et donc $f(0) = 0$.

Connaissant la valeur de $f(0)$, empressons-nous de faire les substitutions $x = 0$ et $y = 0$ pour voir si l'on peut utiliser le résultat $f(0) = 0$. On obtient tour à tour

$$f(f(y)) = y$$

et

$$f(xf(x)) = f(x)^2,$$

dans le premier cas pour tout y dans $\mathbb{R}$, dans le second pour tout x dans $\mathbb{R}$. La première des deux égalités paraît plus simple. Essayons donc de l'utiliser pour simplifier la deuxième. Comment faire apparaître des doubles f dans la seconde égalité ? L'idée est d'introduire une nouvelle variable grâce à la substitution $x = f(t)$, où t est un réel quelconque. Pour s'économiser une nouvelle variable, on effectue la manipulation suivante : on remplace tous les x par des $f(x)$ (à la place de remplacer les x par des $f(t)$). On obtient ainsi

$$f(f(x)f(f(x))) = f(f(x))^2.$$

L'expression obtenue semble bien plus compliquée que l'originale, mais elle se laisse simplifier si l'on utilise le fait que $f(f(y)) = y$. On obtient

$$f(xf(x)) = x^2.$$

Combiné avec l'égalité que l'on a transformée, on a $f(x)^2 = x^2$. Ainsi, étant donné x dans $\mathbb{R}$, on a soit $f(x) = x$, soit $f(x) = -x$. Attention, cela ne signifie pas que l'on obtient deux fonctions solutions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$! On sait seulement que si f est une solution de l'équation de base, alors $f(x) = x$ pour certaines valeurs de x et $f(x) = -x$ pour les autres. La fonction $x \mapsto |x|$ par exemple est aussi de cette forme et pas trop pathologique, mais elle ne semble pas être une solution de l'équation de départ. Il faut donc retourner à l'équation de base pour en apprendre plus sur la forme des solutions.

Rappelons que l'on sait que $f(0) = 0$. Donnons-nous donc $x_1 \neq 0$ tel que $f(x_1) = x_1$ et $x_2 \neq 0$ tel que $f(x_2) = -x_2$ et voyons si une combinaison des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$ est une solution possible de l'équation.

Avec $x = x_1$ et $y = x_2$, on obtient

$$f(x_1^2 - x_2) = x_1^2 + x_2.$$

Or d'un autre côté, on sait que $f(x_1^2 - x_2) = x_1^2 - x_2$ ou $f(x_1^2 - x_2) = -x_1^2 + x_2$. En combinant avec l'égalité ci-dessus, on obtient dans le premier cas $x_2 = 0$ et dans le deuxième cas $x_1 = 0$. Tous deux sont contradictoires avec nos choix de x_1 et x_2. Ainsi, on a prouvé que f ne peut pas être une combinaison des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$. Il ne nous reste donc que deux candidats pour être solution : les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$.

Un calcul élémentaire montre que $x \mapsto x$ est une solution de l'équation de départ. Quant à la fonction $x \mapsto -x$, elle également solution, car

$$-\left(x \cdot (-x) - y\right) = x^2 + y = (-x)^2 + y.$$

$\square$

Avant de conclure cette section sur les substitutions, énumérons quelques take-away clefs. Tout d'abord, il est bon d'attaquer une équation fonctionnelle avec les substitutions de bases, à savoir $x, y = 0$, $x, y = \pm 1$, $x = \pm y$, voire $x = \pm 1/y$ dans certains cas. Souvent, ces substitutions suffisent à déterminer les valeurs $f(0)$ et $f(1)$. Dès que vous apprenez quelque chose de nouveau à propos de f, essayez dès lors de l'utiliser pour en apprendre plus sur f !

2.2 Équations fonctionnelles sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

Jusqu'ici, nous avons vu des exemples où les arguments des fonctions étaient réels. Parfois, on cherche des fonctions dont les arguments sont uniquement entiers ou rationnels. De nouvelles méthodes entrent alors en jeu, comme des résultats de théorie des nombres tels que la divisibilité ou la congruence par exemple. L'approche la plus importante reste toutefois l'induction. Voyons tout de suite un exemple de base.

Exemple 11. *Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tous m, n dans $\mathbb{Z}$*

$$f(m+n) = f(m) + f(n).$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
Si l'on essaie d'identifier les solutions, on remarque que les fonction de la forme $n \mapsto cn$ semblent être les seules. Remarquons au passage que si $f(n) = cn$, alors $c = f(1)$. On va donc montrer que les solutions sont de la forme $n \mapsto f(1)n$.

Gardons nos réflexes et tentons la substitution $m = n = 0$. Elle donne $f(0) = 0$.

On l'a dit, l'outil de base est l'induction. Essayons donc de transformer notre équation pour obtenir une formule qui lie la valeur de $f(n+1)$ à celle de $f(n)$ ou d'une manière plus générale, une formule qui lie la valeur de $f(n)$ aux valeurs de $f(n-1), \ldots, f(0)$. Substituer $m = 1$ nous donne

$$f(n+1) = f(n) + f(1).$$

Rappelons que l'on désire garder $f(1)$ comme un paramètre constant. Il faut interpréter ce résultat de la manière suivante : étant donné la valeur de $f(n)$, alors je peux calculer la valeur de $f(n+1)$. Appliquons donc une induction pour montrer dans un premier temps que $f(n) = f(1)n$ pour $n \geq 0$. On sait déjà que $f(0) = 0 = f(1) \cdot 0$. Supposons à présent que $f(n_0) = f(1)n_0$ pour un certain $n_0 \geq 0$. On a alors

$$f(n_0+1) = f(n_0) + f(1) = f(1)n_0 + f(1) = f(1)(n_0+1),$$

et donc on peut conclure que $f(n) = f(1)n$ pour $n \geq 0$.

La substitution (naturelle !) $m = -n$ dans l'équation de base donne $f(n) = -f(-n)$, car rappelons que $f(0) = 0$. Ainsi, étant donné $n < 0$, on a

$$f(n) = -f(-n) = -(-nf(1)) = f(1)n,$$

car si $n < 0$, alors $-n > 0$ et on sait calculer l'image par f des entiers positifs. On peut donc conclure que $f(n) = f(1)n$ pour tout n dans $\mathbb{Z}$.

On vérifie qu'il s'agit bien d'une solution, car

$$f(1)(m+n) = f(1)m + f(1)n.$$

□

Voyons maintenant un exemple qui fait intervenir des notions de théorie des nombres.

Exemple 12. *Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tous m, n dans $\mathbb{N}$*

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
Commençons par nos substitutions protocolaires. Si l'on pose $m = n = 1$, on obtient $f(1)^2 = f(1)$ et donc $f(1) = 1$, car $f(1)$ ne peut pas être zéro ici.

De plus, il est facile de voir que la propriété de multiplicativité de f, à savoir $f(mn) = f(m)f(n)$, peut s'étendre à plus de deux variables. En effet, avec une simple induction sur k, on montre que pour des nombres naturels arbitraires $n_1, \ldots, n_k$, on a

$$\begin{aligned} f(n_1 \cdots n_k) &= f((n_1 \cdots n_{k-1}) \cdot n_k) \\ &= f(n_1 \cdots n_{k-1}) f(n_k) \\ &= \ldots \\ &= f(n_1) \cdots f(n_k). \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où toutes les variables n_i sont égales, alors on a $f\left(n^k\right) = f(n)^k$, quels que soit les entiers naturels n et k que l'on choisit.

Une telle propriété de multiplicativité de f fait légitimement penser à la décomposition en nombres premiers. De manière plus précise, si l'on se donne $n > 1$ un nombre naturel avec sa décomposition en facteurs premiers $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$, alors on a

$$\begin{aligned} f(n) &= f\left(p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}\right) \\ &= f\left(p_1^{a_1}\right) \cdots f\left(p_r^{a_r}\right) \\ &= f(p_1)^{a_1} \cdots f(p_r)^{a_r}. \end{aligned}$$

En particulier, si l'on connait les valeurs $f(p)$ pour tous les nombres premiers p, alors on peut calculer $f(n)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Mais quelles conditions ces valeurs $f(p)$ doivent-elles satisfaire ? Sont-elles uniquement déterminées par l'équation de base ? En cherchant un peu, on remarque que l'on n'arrive pas à trouver de contraintes pour les valeurs $f(p)$ (exactement comme pour $f(1)$ dans l'exemple précédent). On doit donc les considérer comme des paramètres constants.

Montrons donc que la fonction f qui envoie 1 sur $f(1) = 1$ et $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ sur $f(n) = f(p_1)^{a_1} \cdots f(p_r)^{a_r}$ est solution, quelque soient les valeurs des $f\left(p_i\right)$. Clairement, si $m = 1$ ou $n = 1$, alors cette fonction satisfait bien l'équation $f(mn) = f(m)f(n)$. Dans le cas général où $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ et $m = q_1^{b_1} \cdots q_s^{b_s}$, avec $p_1 = q_1, \ldots, p_k = q_k$ les facteurs premiers communs de m et n (où $0 \leq k \leq \min\{r, s\}$) et $p_{k+1}, \ldots, p_r, q_{k+1}, \ldots, q_s$ leurs facteurs premiers distincts, nous avons

$$\begin{aligned} f(mn) &= f\left(p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r} q_1^{b_1} \cdots q_s^{b_s}\right) \\ &= f\left(p_1^{a_1+b_1} \cdots p_k^{a_k+b_k} p_{k+1}^{a_{k+1}} \cdots p_r^{a_r} q_{k+1}^{b_{k+1}} \cdots q_s^{b_s}\right) \\ &= f(p_1)^{a_1+b_1} \cdots f(p_k)^{a_k+b_k} f(p_{k+1})^{a_{k+1}} \cdots f(p_r)^{a_r} f(q_{k+1})^{b_{k+1}} \cdots f(q_s)^{b_s} \\ &= f(p_1)^{a_1} \cdots f(p_r)^{a_r} f(q_1)^{b_1} \cdots f(q_s)^{b_s} \\ &= f(n)f(m). \end{aligned}$$

□

Avant de conclure cette section, voyons un exemple avec une fonction définie sur les nombres rationnels. Le schéma d'extension de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$ présenté ici est à retenir, car il est courant.

Exemple 13. *Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{Q}$*

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
On sait déjà depuis l'exemple 11 que $f(n) = f(1)n$ pour tout n dans $\mathbb{Z}$. De plus, on se souvient aussi que $f(x) = -f(-x)$ et donc qu'il suffit de déterminer f sur les nombres positifs et d'utiliser cette formule pour étendre la solution aux nombres négatifs.

Remarquons déjà que pour un entier positif k et un rationnel x, on a

$$\begin{aligned} f(kx) &= f(\underbrace{x + \ldots + x}_{k \text{ fois}}) \\ &= f(x) + \ldots + f(x) \\ &= kf(x), \end{aligned}$$

où l'on a étendu l'additivité de f à plus de deux variables par un argument similaire à celui utilisé dans l'exemple précédent.

Ainsi, étant donné un rationnel $x > 0$ que l'on écrit $x = a/b$, avec a et b dans $\mathbb{N}$. On a alors par la propriété précédente

$$f(x) = f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = af\left(\frac{1}{b}\right).$$

D'un autre côté, on peut déterminer l'image de l'inverse d'un entier positif de la manière suivante :

$$f(1) = f\underbrace{\left(\frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{b}\right)}_{b \text{ fois}} = f\left(\frac{1}{b}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{b}\right) = bf\left(\frac{1}{b}\right),$$

et donc

$$f\left(\frac{1}{b}\right) = f(1)\frac{1}{b}.$$

Finalement, on a

$$f(x) = f(1)\frac{a}{b} = f(1)x$$

qui nous permet de conclure que $f(x) = f(1)x$ pour tout x dans $\mathbb{Q}$, car pour un rationnel $y < 0$, on a $f(y) = -f(-y) = f(1)y$ par le même raisonnement utilisé dans l'exemple 11. On vérifie que $x \mapsto f(1)x$ satisfait l'équation de départ de la même manière que dans l'exemple précédent. □

2.3 Le calcul double et multiple

Si l'induction reste la méthode-clef pour résoudre les équations fonctionnelles sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$, il existe des cas où l'on n'arrive pas à simplifier l'équation de manière significative. On tourne alors en rond avec des gros termes fonctionnels compliqués. On peut alors essayer de calculer une expression fixe de deux façons fondamentalement différentes, un peu comme on s'est surpris à calculer $f(xf(x))$ de deux manières dans l'exemple 10. En combinant les résultats, on obtient souvent de nouvelles équations plus utiles que les précédentes.

De manière plus générale, on peut parfois construire un système d'équations dont les inconnues sont des termes fonctionnels que l'on souhaite calculer. Il faut alors faire apparaître ces termes de manière significativement différente pour ne pas obtenir de résultats triviaux en résolvant le système engendré.

Voyons tout de suite un premier exemple.

Exemple 14. *Trouver toutes les fonctions* $f\colon (-1;+\infty) \to (-1;+\infty)$ *telles que pour tous* $x, y > 0$

$$f\left(xf(x-1) + yf(y-1)\right) = xf(3x-1).$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
Si l'on substitue naturellement $x = 1$, on obtient

$$f\left(f(0) + yf(y-1)\right) = f(2),$$

pour tout $y > 0$. Parallèlement, la substitution $y = 1$ mène à

$$f\left(xf(x-1) + f(0)\right) = xf(3x-1),$$

pour tout $x > 0$. On peut à présent comparer ces deux expressions et remarquer que, en échangeant x et y, les termes de gauche sont égaux. On vient donc d'effectuer un calcul double pour le terme $f\left(f(0) + yf(y-1)\right)$! On obtient ainsi,

$$xf(3x-1) = f(2),$$

pour tout $x > 0$. Étant donné $t > -1$, on substitue $x = \frac{t+1}{3}$ et on obtient

$$f(t) = \frac{3f(2)}{t+1},$$

Une solution est donc une fonction de la forme $x \mapsto \frac{c}{x+1}$ ou c est une constante.
Vérifions à présent quelles conditions doit satisfaire c pour que la fonction ci-dessus soit solution du problème originel. L'équation de départ devient

$$\frac{c}{2c+1} = \frac{c}{3}.$$

On tire donc $c = 0$ ou $c = 1$. On a donc finalement deux solutions qui sont la fonction nulle et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$. On n'a pas besoin ici de vérifier que ces deux fonctions sont solutions car on les a trouvées en essayant quelles valeurs de c sont effectivement solutions de l'équation de départ. Si vous n'êtes pas sûrs, mieux vaut vérifier une fois de trop ses solutions qu'oublier de le faire. $\square$

L'équation fonctionnelle de l'exemple suivant n'a qu'une seule variable libre. De telles équations sont en principe difficiles car il y a peu de substitutions raisonnables à faire et moins de degrés de liberté.

Exemple 15. *Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant les trois conditions suivantes :*

(a) $f(-x) = -f(x)$ *pour tout x dans $\mathbb{R}$,*

(b) $f(x+1) = f(x) + 1$ *pour tout x dans $\mathbb{R}$,*

(c) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$ *pour tout $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}$.*

Solution. Soit f une solution du système d'équations ci-dessus.
En substituant $x = 0$ dans (a), il s'ensuit directement que $f(0) = 0$. L'équation (b) fournit la relation d'induction $f(n+1) = f(n)+1$ qui, combinée à $f(0) = 0$, nous permet de conclure que $f(n) = n$ pour tout n dans $\mathbb{Z}$.

Il nous faut maintenant une idée pour avancer, car on ne conclura rien de plus avec des substitutions de base. L'idée est de combiner les équations (b) et (c) pour calculer un même terme fonctionnel de deux manières différentes. On cherche donc une grandeur que l'on peut écrire à la fois sous la forme $a+1$ et $1/b$. Il y a bien sûr beaucoup de possibilités, mais les différentes expressions qui apparaissent dans les conditions de base suggèrent de s'intéresser à $\frac{1}{x} + 1$ pour $x \neq 0, -1$.

D'un côté, on obtient avec (b), en utilisant ensuite (c) :

$$f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 1 + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{f(x)}{x^2}. \tag{4}$$

D'un autre côté, avec (c) on a aussi

$$f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = f\left(\frac{1}{\frac{x}{x+1}}\right) = \frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right)(x+1)^2}{x^2}.$$

À nouveau, ne baissez pas les bras ici à cause du terme $f\left(\frac{x}{x+1}\right)$ avant d'avoir essayé de calculer sa valeur ! Évidemment, pour le faire, il faut le mettre sous une forme dans laquelle on peut appliquer (b) ou (c). On a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{x+1}\right) &= f\left(-\frac{1}{x+1} + 1\right) \\ &= 1 + f\left(-\frac{1}{x+1}\right) \\ &= 1 - f\left(\frac{1}{x+1}\right) \\ &= 1 - \frac{f(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= 1 - \frac{f(x)+1}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

En somme, on a ainsi

$$f\left(\frac{1}{x}+1\right)=\frac{(x+1)^2-1-f(x)}{x^2}. \tag{5}$$

Une comparaison entre (4) et (5) donne immédiatement

$$f(x)=x,$$

pour tout $x\neq 0,-1$. Comme l'on sait déjà que $f(0)=0$ et $f(-1)=-1$, on conclut que $f(x)=x$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Vérifions finalement que $x\mapsto x$ est en effet une solution. On a bien

(a) $-x=-x$,

(b) $x+1=x+1$,

(c) $\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2}$. □

Voyons à présent un exemple où l'on doit construire un système d'équations pour pouvoir calculer quelques valeurs de base.

Exemple 16. *Trouver toutes les fonctions $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ telles que pour tous m,n dans $\mathbb{Z}$,*

$$f(m+n)+f(mn)=f(m)f(n)+1.$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
Une première recherche de solutions mène aux fonctions $n\mapsto 1$ et $n\mapsto n+1$. Il existe néanmoins une troisième solution moins standard à côté de laquelle on risque facilement de passer dans un premier temps.

Essayons d'établir une formule d'induction en substituant naturellement $n=1$, ce qui entraîne :

$$f(m+1)=(f(1)-1)\,f(m)+1, \tag{6}$$

pour tout m dans $\mathbb{Z}$.

On obtient ainsi notre formule d'induction. Il nous suffit maintenant de calculer $f(1)$, car de cette valeur dépend tout le reste. Aucune substitution nous donnera directement la valeur de $f(1)$; plusieurs valeurs du type $f(n)$ seront combinées dans une même équation. Il faut donc obtenir un système à l'aide d'un minimum de substitutions astucieuses.

On commence en substituant $m=n=0$ ce qui donne $(f(0)-1)^2=0$ et donc $f(0)=1$. De plus, on a

$m=1$ et $n=-1$: $\quad f(-1)(f(1)-1)=0.$

$m=-2$ et $n=1$: $\quad f(-1)+f(-2)=f(-2)f(1)+1.$

$m=n=-1$: $\quad f(-2)+f(1)=f(-1)^2+1.$

De la première équation, on déduit que $f(1) = 1$ ou $f(-1) = 0$. Si $f(-1) = 0$, alors en éliminant $f(-2)$ des deux dernières équations, il s'ensuit que $(f(1) - 1)^2 = 1$ et donc $f(1) = 0$ ou $f(1) = 2$. On va traiter trois cas selon la valeur de $f(1)$.

1. $f(1) = 2$. L'équation (6) devient alors $f(m + 1) = f(m) + 1$. Avec $f(1) = 2$, on conclut par induction que $f(n) = n + 1$ pour tout n dans $\mathbb{Z}$. Il s'agit en effet d'une solution, car
$$(m + n + 1) + (mn + 1) = (m + 1)(n + 1) + 1.$$

2. $f(1) = 1$. L'équation (6) donne $f(m + 1) = 1$ ce qui implique que $f(n) = 1$ pour tout n dans ce cas-ci. Il s'agit trivialement d'une solution, car $1 + 1 = 1 + 1$.

3. $f(1) = 0$. L'équation (6) donne maintenant le résultat suivant : $f(m+1) = 1-f(m)$. De $f(1) = 0$, on obtient dans l'ordre $f(2) = 1$, $f(3) = 0$, $f(4) = 1$, etc. Il semble donc que f soit une fonction qui envoie n sur 0 si n est impair et n sur 1 si n est pair. On le montre aisément par induction.

Vérifions que cette fonction satisfait bien l'équation de départ. Pour ce faire, nous devons distinguer des cas selon la parité de m et de n. Si m et n sont pairs, alors on a $1 + 1 = 1 \cdot 1 + 1$. Si m et n sont impairs, on a $1 + 0 = 0 \cdot 0 + 1$. Enfin, si l'un est pair et l'autre est impair, alors $0 + 1 = 0 \cdot 1 + 1$. Dans tous les cas, l'équation est vérifiée.

Cette équation admet donc trois solutions distinctes. □

Une autre situation où le calcul double peut être utile est la suivante : si on a une équation fonctionnelle telle que l'un des côtés présente une certaine **invariance**, alors l'autre côté doit également vérifier cette invariance. Par exemple, si le côté gauche d'une équation fonctionnelle ne change pas lorsque l'on échange x et y, ou bien si l'on remplace x par $-x$ ou encore par $f(x)$, alors cela doit aussi être le cas pour le côté droit. Une comparaison entre 'l'ancien' et le 'nouveau' côté droit donne ainsi une nouvelle équation.

Reprenons l'équation de l'exemple 14 :
$$f\left(xf(x-1) + yf(y-1)\right) = xf(3x-1).$$
On remarque que le côté gauche est invariant si l'on intervertit x et y. Le côté droit doit donc vérifier la même propriété. Cette observation fournit donc l'équation
$$xf(3x-1) = yf(3y-1),$$
quelque soient $x, y > 0$. Si l'on pose à présent $y = 1$, alors on obtient directement l'équation $xf(3x-1) = f(2)$ et on conclut de la même manière.

L'exemple suivant est une illustration d'un problème difficile si l'on ne connait pas l'astuce précédente.

Exemple 17. *(CSO 2001) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{R}$*
$$f(x^2 + f(y)) = (x-y)^2 \cdot f(x+y).$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
Le côté gauche est invariant si l'on remplace x par $-x$. Il en va donc de même pour le côté droit. Cela fournit l'équation

$$(x-y)^2 \cdot f(x+y) = (x+y)^2 \cdot f(y-x).$$

On aimerait maintenant substituer x et y de telle manière que $x+y$ prenne toutes les valeurs réelles pendant que $x-y$ reste constant, par exemple égal à 1. On y arrive en posant $x = \frac{1}{2}(t-1)$ et $y = \frac{1}{2}(t+1)$ où t est un nombre réel arbitraire. L'équation devient $f(t) = f(1)t^2$ pour tout t dans $\mathbb{R}$. Toutes les solutions sont donc de la forme $x \mapsto cx^2$ avec une constante réelle c.

Remplaçons dans l'équation de base pour déterminer d'éventuelles contraintes sur c. L'équation devient

$$c\left(x^2 + cy^2\right)^2 = c\left(x^2 - y^2\right)^2.$$

pour tout x, y dans $\mathbb{R}$. Avec $x = y = 1$, on obtient $c(c+1)^2 = 0$ et donc $c = 0$ ou $c = -1$. Remarquez que si $c = 0$ ou $c = -1$, alors, réciproquement, on a bien égalité pour tous x, y dans $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation fonctionnelle sont donc la fonction nulle et $x \mapsto -x^2$. □

2.4 Égalisation de termes fonctionnels

Parfois, lorsqu'une équation fonctionnelle paraît plutôt robuste, il est bon de chercher certaines substitutions sophistiquées qui permettent d'égaler deux termes fonctionnels. En clair, si, par une substitution astucieuse, on arrive à égaler deux membres additifs ou multiplicatifs de l'équation, alors cette dernière peut se simplifier de manière décisive. Étudions tout de suite un exemple pour éclaircir ces propos.

Exemple 18. *(Suisse* 1998*) Trouver toutes les fonctions $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{R}$,*

$$f(f(x)+y) = f(x^2-y) + 4f(x)y.$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
Une démarche standard suggérerait de tenter les substitutions qui annuleraient les arguments des deux gros termes fonctionnels, à savoir $y = x^2$ et $y = -f(x)$. Mais voyons ici une méthode plus directe.

Existe-t-il une substitution qui égalerait les termes $f(f(x)+y)$ et $f(x^2-y)$, de manière à ce qu'ils se simplifient mutuellement dans l'équation ? Pour cela, on doit avoir $f(x)+y = x^2-y$. On peut donc prendre $y = (x^2 - f(x))/2$. Cette substitution donne

$$4f(x) \cdot \frac{x^2 - f(x)}{2} = 0,$$

pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Il s'ensuit directement qu'étant donné une valeur x dans $\mathbb{R}$, alors on a soit $f(x) = 0$, soit $f(x) = x^2$. En particulier, $f(0) = 0$. Attention à nouveau, cela ne signifie pas que l'on a soit $f(x) = 0$ pour tout x, soit $f(x) = x^2$ pour tout x, mais bien que n'importe quel mélange de ces deux fonctions est potentiellement une solution ! On finit la preuve de la même manière que dans l'exemple 10.

Pour cela, supposons qu'il existe deux nombres distincts $x_1, x_2 \neq 0$ avec $f(x_1) = 0$ et $f(x_2) = x_2^2$. Posons $x = x_1$ et $y = x_2$ dans l'équation de base pour obtenir

$$f(x_1^2 - x_2) = x_2^2.$$

D'un autre côté, on a soit $f(x_1^2 - x_2) = 0$, soit $f(x_1^2 - x_2) = (x_1^2 - x_2)^2$. Combiné avec l'égalité ci-dessus, on a dans le premier cas $x_2 = 0$ et donc une contradiction, et dans le deuxième cas $x_1^2(x_1^2 - 2x_2) = 0$. Comme on a supposé $x_1 \neq 0$, on obtient $x_1^2 = 2x_2$.
Substituer $x = 0$ et $y = x_2$ nous donne $f(-x_2) = f(x_2) = x_2^2$. Si l'on répète l'argument ci-dessus avec la substitution $x = x_1$ et $y = -x_2$, alors on obtient de manière similaire $x_1^2 = -2x_2$ et donc $x_1 = x_2 = 0$ qui est également une contradiction.
On conclut donc qu'il y a deux fonctions potentiellement solution, la fonction nulle et la fonction $x \mapsto x^2$. La première vérifie bien l'identité de base, car $0 = 0 + 0$. Quant à la seconde, on a bien

$$\left(x^2 + y\right)^2 = \left(x^2 - y\right)^2 + 4x^2 y.$$

□

Allez, encore un petit exemple pour la route, c'est cadeau.

Exemple 19. *Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{R}^+$,*

$$f\left(x^2 f\left(f(y)\right)\right) x = f(x) f(y).$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
Ce problème, après quelques tentatives, se révèle hermétique aux méthodes de substitutions élémentaires. Nous travaillons ici avec un produit de termes fonctionnels. On peut tenter d'égaler ces termes fonctionnels, dans le but de pouvoir simplifier un peu cette équation.

Tout d'abord, si $x = \frac{1}{f(f(y))}$, alors $f\left(x^2 f\left(f(y)\right)\right) = f(x)$, et après simplification, on obtient

$$f(y) f\left(f(y)\right) = 1. \tag{7}$$

Notez que cette manipulation est licite parce que le domaine d'arrivée de f ne contient pas zéro.

De manière similaire, avec $x = \sqrt{\frac{y}{f(f(y))}}$, on obtient $f\left(x^2 f\left(f(y)\right)\right) = f(y)$, et ainsi, après simplification

$$f\left(\sqrt{\frac{y}{f(f(y))}}\right) = \sqrt{\frac{y}{f(f(y))}}. \tag{8}$$

Une telle équation devrait vous faire bondir de votre chaise. L'étudiant qui aura pris le temps de chercher d'éventuelles solutions à l'équation de départ aura abouti à la conclusion que probablement seule la fonction $x \mapsto 1/x$ satisfait l'équation. Or, l'unique valeur positive z qui satisfait $z = 1/z$ est la valeur $z = 1$. Ainsi, il est probable qu'on puisse déduire quelque chose de décisif à ce niveau-là.

Reprenons l'équation (7) et appliquons-la aux valeurs z telles que $f(z) = z$. L'équation devient $zf(z) = 1$. En utilisant à nouveau que $f(z) = z$, on en déduit $z^2 = 1$ et donc $z = 1$. Ainsi on a montré que si une valeur z satisfait $f(z) = z$, où f est une solution de l'équation de départ, alors $z = 1$.

Si l'on combine ce résultat avec l'égalité (8), on obtient $\sqrt{\frac{y}{f(f(y))}} = 1$ et donc $f(f(y)) = y$, quelque soit la valeur de y dans $\mathbb{R}^+$. Finalement, en utilisant l'égalité précédente, l'équation (7) devient $f(y) = 1/y$.

Vérifions enfin qu'il s'agit bien d'une solution. En effet, on a

$$\frac{1}{x^2 \frac{1}{\frac{1}{y}}} \cdot x = \frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}.$$

□

Ce dernier exemple vous montre qu'il ne faut pas craindre les vilaines substitutions. Après avoir essayé les substitutions de base, tentez toujours d'égaler les termes fonctionnels de part et d'autre de l'équation. C'est un bon réflexe en matière d'équations fonctionnelles.

Cet exemple vous montre aussi qu'il faut prendre garde aux conclusions hâtives. En effet, un lecteur non-averti pourrait arriver à l'équation (8) et naïvement substituer $z = \sqrt{\frac{y}{f(f(y))}}$ pour déduire que $f(z) = z$. Évidemment cette égalité n'est valable que pour les z qui peuvent s'exprimer sous la forme $z = \sqrt{\frac{y}{f(f(y))}}$ pour un certain réel positif y. Elle n'implique donc en aucun cas que f doit être la fonction identité.

Le chapitre suivant couvre d'autres méthodes plus avancées qui s'appuient sur des propriétés standards des fonctions.

3 Quelques méthodes supplémentaires

3.1 Surjectivité

Nous avons insisté, lorsque nous définissions une fonction, que si toutes les valeurs de l'ensemble de départ avaient exactement une image dans l'ensemble d'arrivée, rien n'exigeait que toutes les valeurs de l'ensemble d'arrivée soient l'image d'un élément de l'ensemble de départ.

On dit ainsi d'une fonction $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ qu'elle est *surjective* si pour tous les éléments b dans $\mathcal{B}$, il existe a dans $\mathcal{A}$ tel que $f(a) = b$. Autrement dit, on exige ici que tous les éléments de l'ensemble d'arrivée soient l'image d'un élément de l'ensemble de départ.
Par exemple, la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + 1, \end{aligned}$$

n'est pas surjective, car étant donné $0 \in \mathbb{R}$, il n'existe pas de x dans $\mathbb{R}$ tel que $x^2 + 1 = 0$.
En revanche, la fonction (et il s'agit bien d'une fonction différente !)

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to [1; +\infty) \\ x &\mapsto x^2 + 1, \end{aligned}$$

est surjective. En effet, étant donné $t \geq 1$, on a $t = f\left(\sqrt{t-1}\right)$.

Deux questions naturelles se posent à ce stade. Tout d'abord : quelle est l'utilité d'une fonction surjective pour la résolution d'une équation fonctionnelle ? Et ensuite : comment montre-t-on concrètement qu'une fonction solution doit être surjective ?

L'usage le plus fréquent de la surjectivité, consiste à utiliser l'existence d'une pré-image pour des valeurs de bases telles que 0 ou 1. Parfois, cela nous permet d'établir des égalités du type $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$, qui sont souvent très utiles comme vous avez pu le constater.

De manière plus générale, la surjectivité nous garantit l'existence d'une pré-image pour toutes les valeurs de l'ensemble d'arrivée. On peut donc, dans le cas le plus général, attribuer au premier paramètre libre la valeur d'une pré-image d'une expression qui dépend d'un second paramètre libre.

Il existe une troisième situation dans laquelle la surjectivité est utile. Dans le cas où une des variables libres, disons x, qui apparaît dans l'équation, apparaît toujours sous la forme $f(x)$ et que l'on sait déjà que f doit être surjective, alors on peut remplacer tous les $f(x)$ par une nouvelle variable, pour autant que le domaine d'arrivée de f soit le même ensemble que l'ensemble de départ. Voyons un court exemple pour illustrer cet énoncé :

Exemple 20. *Trouver toutes les fonctions surjectives $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout x dans $\mathbb{R}$,*

$$f(f(x)) = f(x).$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
On sait que f est surjective. Autrement dit, lorsque x varie parmi toutes les valeurs réels, alors $f(x)$ prend, tour à tour, toutes les valeurs réels également. Ainsi, on peut remplacer les $f(x)$ de l'équation par une nouvelle variable réelle t et obtenir l'équation $f(t) = t$ pour tout t dans $\mathbb{R}$.

Attention ! Remplacer $f(x)$ par une nouvelle variable est toujours licite, même si f n'est pas surjective (c'est une simple ré-écriture !). Là où l'on utilise significativement que f est surjective, est lorsqu'on affirme que l'équation $f(t) = t$ tient pour tout t dans $\mathbb{R}$. En général, on peut dire que l'on a $f(t) = t$, seulement pour les t qui peuvent s'écrire sous la forme $t = f(x_0)$ pour un certain x_0 dans $\mathbb{R}$.

Dans ce cas, la fonction $x \mapsto x$ est bien solution, car c'est une fonction surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et on a bien $x = x$. $\square$

Avant de passer au premier véritable exemple, détaillons le procédé standard pour montrer qu'une solution d'une équation fonctionnelle doit être surjective. La plupart du temps, on essaie, par des opérations appropriées sur l'équation fonctionnelle, de transformer l'équation pour la mettre sous la forme $f(\dots) = A(x, y, \dots)$, de telle façon que d'un côté il y ait un terme fonctionnelle, et de l'autre côté une expression A en une ou plusieurs variables libres. Si A est une expression qui peut prendre chaque valeur de l'ensemble d'arrivée de f, alors cela doit également être le cas pour f, peu importe à quel point l'expression $f(\dots)$ est compliquée.

Par exemple, supposons que nous avons l'équation fonctionnelle suivante

$$f(f(x) - x + y)^2 = x + f(y^2 - x)$$

pour des fonctions $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors on peut montrer que toute solution f est surjective. En effet, dans l'équation, on a deux termes fonctionnels, chacun d'un côté de l'équation, dont un est élevé au carré. On va donc tenter d'"immobiliser" celui qui est élevé au carré, pour avoir un contrôle complet sur l'autre. Dans ce but, on substitue $y = x - f(x)$, et on obtient l'équation

$$f\left((x - f(x))^2 - x\right) = f(0)^2 - x.$$

Il y a maintenant du côté droit une fonction affine non-constante en x, qui est naturellement surjective en tant que fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, car pour tout t dans $\mathbb{R}$, $t = f(0)^2 - (f(0)^2 - t)$. Si le côté droit peut prendre toutes les valeurs réelles, alors il en va de même pour le côté gauche. Comme il s'agit d'un terme fonctionnel pur (i.e. sans exposant, coefficient ou autre fioriture), f est par conséquent surjective. Le détail mathématique de l'argument à la forme suivante : étant donné t dans $\mathbb{R}$, on a

$$t = f\left(\left(\left(f(0)^2 - t\right) - f\left(f(0)^2 - t\right)\right)^2 - \left(f(0)^2 - t\right)\right).$$

Vous comprenez donc qu'en pratique, on préfère la phrase d'explication au détail mathématique.

Passons à un premier exemple concret.

Exemple 21. *Trouver toutes les fonctions $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{R}$,*

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right) + f\left(f(y)\right) = f(y) + x.$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
Dans le but de montrer que f est surjective, on pose $y = 0$ pour fixer deux des trois termes fonctionnels. On obtient ainsi

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right) = x + f(0) - f(f(0)).$$

Le membre de droite est une fonction affine qui prend naturellement toutes les valeurs réelles. Le membre de gauche est un terme fonctionnel pur. On conclut donc que f est une fonction surjective.

On remarque à présent qu'à chaque fois que la variable y apparaît dans l'équation, elle apparaît sous la forme $f(y)$. Posons donc $t = f(y)$. On obtient ainsi

$$f(t) = t + x - f\left(f\left(f(x)\right)\right).$$

Cette équation est valable pour tout x dans $\mathbb{R}$ et également pour tout t dans $\mathbb{R}$, car f est surjective. Avec $x = 0$, on obtient donc $f(t) = t + c$ pour tout réel t, où c est une constante. En remplaçant dans l'équation de départ, avec $x = y = 0$, on obtient $3c + 2c = c$ et donc $c = 0$, i.e. f est la fonction identité.

On vérifie bien que la fonction identité est une solution, car $x + y = y + x$. □

L'exemple suivant est une superbe équation qui vient de l'IMO 1992. Dans un premier temps, on va utiliser des notions de surjectivité pour établir quelques premiers résultats. On terminera la solution plus tard.

Exemple 22. *(IMO 92) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{R}$*

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2.$$

Début de solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
Pour montrer la surjectivité, fixons les termes fonctionnels qui ne sont pas purs. On pose donc $x = 0$ et on obtient

$$f(f(y)) = y + f(0)^2. \tag{9}$$

Le membre de droite est une équation linéaire en y qui peut naturellement prendre toutes les valeurs réelles et le membre de gauche est un terme fonctionnel. On conclut donc que f est surjective. Il existe donc par conséquent un nombre réel a tel que $f(a) = 0$.

Essayons de mettre à profit l'équation (9) en appliquant f des deux côtés de l'équation d'origine. Il s'ensuit que

$$x^2 + f(y) + f(0)^2 = f\left(f(x^2 + f(y))\right) = f(y + f(x)^2).$$

Substituons ici $x = y = a$, pour obtenir

$$a^2 + f(0)^2 = 0$$

et donc comme attendu, $a = f(0) = 0$.

La substitution $y = 0$ dans l'équation de base donne ainsi

$$f(x^2) = f(x)^2 \tag{10}$$

pour tout x dans $\mathbb{R}$.

De plus, l'équation (9) devient $f(f(y)) = y$ pour tout y dans $\mathbb{R}$. Si l'on utilise cette identité combinée à l'identité (10), on peut ré-écrire l'équation originale de la manière suivante :

$$f(x^2 + f(y)) = f(f(y)) + f(x^2).$$

Utilisons à nouveau la surjectivité de f et posons $t = f(y)$. On obtient ainsi

$$f(x^2 + t) = f(t) + f(x^2) \tag{11}$$

pour tout x, t dans $\mathbb{R}$. On verra plus tard comment conclure la preuve. $\square$

Voilà qui conclut la discussion sur la surjectivité. C'est une notion-clef. En commençant par identifier les potentielles fonctions solutions de l'équation, si l'on trouve qu'elles sont surjectives, alors il est bon de tenter de montrer que les solutions sont nécessairement des fonctions surjectives.

D'une manière plus générale, même si f n'est pas surjective, il est bon d'étudier les valeurs que peut prendre f ou certaines expressions fonctionnelles en f. Gardez pour l'instant ce conseil à l'esprit et il prendra tout son sens lorsque vous aurez développé une certaine expérience.

Passons à présent à une notion jumelle : l'injectivité.

3.2 Injectivité

Rappelons que la définition d'une fonction nous assure que tous les éléments de l'ensemble de départ ont exactement une image dans l'ensemble d'arrivée. Vous aurez certainement remarqué à ce stade qu'il est tout à fait possible en général qu'un même élément de l'ensemble d'arrivée soit l'image de plusieurs éléments de l'ensemble de départ. On va donc qualifier une fonction d'*injective*, si un même élément de l'ensemble d'arrivée n'est jamais l'image de plus d'un élément de l'ensemble de départ.

En termes mathématiques, on dit d'une fonction $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ qu'elle est *injective* si pour tous a_1, a_2 dans $\mathcal{A}$

$$f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2.$$

De manière équivalente, si $a_1 \neq a_2$ sont deux éléments distincts de $\mathcal{A}$, alors $f(a_1) \neq f(a_2)$. Géométriquement, pour les fonctions réelles d'une variable, on peut vérifier l'injectivité en appliquant le test de la ligne horizontale sur le graphe de la fonction ; à savoir, toute ligne perpendiculaire à l'axe vertical ne doit jamais avoir deux intersections ou plus avec le graphe de la fonction.

Profitons encore de cet espace pour définir la bijectivité d'une fonction. On dit simplement qu'une fonction est *bijective* lorsqu'elle est à la fois surjective et injective.

Gardez bien en tête le petit rappel suivant. On dit d'une fonction $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ qu'elle est :

1. surjective, si tous les éléments de l'ensemble d'arrivée $\mathcal{B}$ ont **au moins** une pré-image dans l'ensemble de départ $\mathcal{A}$.
2. injective, si tous les éléments de l'ensemble d'arrivée $\mathcal{B}$ ont **au plus** une pré-image dans l'ensemble de départ $\mathcal{A}$.
3. bijective, si tous les éléments de l'ensemble d'arrivée $\mathcal{B}$ ont **exactement** une pré-image dans l'ensemble de départ $\mathcal{A}$.

Par exemple, considérons les quatre fonctions suivantes. La première,

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

est une fonction qui n'est ni surjective, ni injective. En effet, elle n'est pas surjective car -1 n'est l'image d'aucun nombre réel et elle n'est pas injective car $f(1) = f(-1) = 1$.

Si l'on prend

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

alors on obtient une fonction qui n'est pas surjective, mais qui est injective. En effet, elle n'est pas surjective car -1 n'est l'image d'aucun nombre réel, mais elle est injective, car si l'on se donne $x \neq y$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$, alors $x^2 \neq y^2$.

Si à présent, on considère

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

alors on obtient une fonction surjective qui n'est pas injective. En effet, elle est surjective, car pour tout t dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$, on a $t = (\sqrt{t})^2 = f(\sqrt{t})$. Cependant, elle n'est pas injective car $f(1) = f(-1) = 1$.

Enfin, la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

est une fonction bijective.

À nouveau, vous devez vous demander l'utilité d'une fonction injective dans la résolution des équations fonctionnelles. L'usage le plus répandu est la "simplification par f" des deux côtés d'une égalité : si l'une des équations que l'on a obtenue est une égalité de deux termes fonctionnels, et que l'on sait que toute fonction solution est injective, alors, nécessairement, on doit avoir égalité des arguments. Voyons tout de suite un premier exemple :

Exemple 23. *Trouver toutes les fonctions injectives $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout x dans $\mathbb{R}$,*

$$f(f(x)) = f(x).$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
Nous cherchons ici uniquement des fonctions injectives. Rappelons que si f est injective et que pour u, v dans $\mathbb{R}$ on a $f(u) = f(v)$, alors nécessairement $u = v$. Pour ce problème, étant donné x dans $\mathbb{R}$, on a $f(f(x)) = f(x)$ et donc, comme f est injective, nécessairement $f(x) = x$. Et voilà ! C'est déjà fini.

On conclut le problème en vérifiant que la fonction identité est bien une solution du problème. En effet, c'est une fonction injective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et on a bien $x = x$. $\square$

Comment montre-t-on qu'une fonction est injective ? En général, par des substitutions astucieuses, on va chercher à obtenir une identité en une variable, disons x, qui apparaît toujours sous la forme $f(x)$, sauf pour une occurrence où l'on espère que la variable apparaisse "injectivement nue", i.e. en dehors de tout terme fonctionnel. Ainsi, si l'on suppose que l'on a $f(a) = f(b)$, alors on va pouvoir conclure que $a = b$.

Rien ne vaut un premier exemple pour essayer de comprendre cette phrase obscure. Ce problème est une équation tirée du tour final en 2012.

Exemple 24. *(Tour final 2012) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{R}$,*

$$f(f(x) + 2f(y)) = f(2x) + 8y + 6.$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
On remarque que seule la variable y apparaît en dehors de tout terme fonctionnel. De plus, vous remarquerez avec l'expérience que lorsque l'on veut prouver l'injectivité de f, il est bon de se débarrasser de la variable qui apparaît sous la forme $f(x)$ et $f(2x)$ dans la même équation. Posons donc $x = 0$ pour obtenir

$$f(f(0) + 2f(y)) = f(0) + 8y + 6.$$

À nouveau, on apprend avec le métier, que si l'on a une telle équation, c'est gagné pour l'injectivité. En effet, supposons que l'on ait $f(u) = f(v)$ pour deux réels u et v. Alors, on a $f(f(0)+2f(u)) = f(f(0)+2f(v))$ et donc $f(0)+8u+6 = f(0)+8v+6$ qui implique naturellement $u = v$. On a donc montré que f devait être injective.

Essayons à présent de n'avoir plus qu'un terme fonctionnel de chaque côté de l'équation, de manière à pouvoir simplifier par f. Pour cela, il faut se débarrasser du $8y + 6$. On va donc poser $y = -3/4$. On a ainsi

$$f\left(f(x) + 2f\left(\frac{-3}{4}\right)\right) = f(2x).$$

Comme f est injective, on peut simplifier par f et on obtient

$$f(x) + 2f\left(\frac{-3}{4}\right) = 2x.$$

On conclut donc qu'une solution est de la forme $x \mapsto 2x+c$. En remplaçant dans l'équation de départ, avec $x = y = 0$, on obtient $7c = c + 6$ et donc $c = 1$.

On vérifie à présent que la fonction $x \mapsto 2x + 1$ est solution. En effet, on a

$$2\left((2x + 1) + 2(2y + 1)\right) + 1 = 4x + 8y + 7 = 2 \cdot (2x) + 1 + 8y + 6.$$

$\square$

Voyons encore un dernier exemple que l'on va résoudre tantôt en utilisant l'injectivité des solutions, tantôt en utilisant la surjectivité des solutions.

Exemple 25. *Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{R}$,*

$$f(f(x)f(y)) = f(x)y.$$

Première solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
De toute évidence, la fonction nulle est une solution de l'équation. Pour la suite, on va exclure cette solution et supposer qu'il existe un nombre réel a avec $f(a) \neq 0$.

En substituant $x = a$, on obtient

$$f(f(a)f(y)) = f(a)y.$$

On va maintenant montrer que f est injective. Soit donc u et v deux réels tels que $f(u) = f(v)$. On obtient

$$f(a)u = f(f(a)f(u)) = f(f(a)f(v)) = f(a)v,$$

et comme $f(a) \neq 0$, on a $u = v$. Les solutions non nulles de l'équation sont donc injectives.

Dans le but d'obtenir une égalité de termes fonctionnels, on remplace maintenant $y = 1$ dans l'équation de départ et on obtient $f(f(x)f(1)) = f(x)$. De l'injectivité de f il s'ensuit que $f(x)f(1) = x$. Avec $x = 1$, on obtient encore $f(1)^2 = 1$ et donc $f(1) = \pm 1$. On obtient donc deux fonctions : $x \mapsto x$ ou $x \mapsto -x$.

On peut vérifier que les deux fonctions satisfont l'égalité de départ, car on a la fois $xy = xy$ et $-\left((-x)(-y)\right) = (-x) \cdot y$.

$\square$

Deuxième solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
On suppose à nouveau que f n'est pas identiquement nulle et on choisit un nombre réel a avec $f(a) \neq 0$. En substituant $x = a$ il s'ensuit

$$f(f(a)f(y)) = f(a)y.$$

Le côté droit peut prendre toutes les valeurs réelles, car $f(a) \neq 0$. Comme le membre de gauche est un terme fonctionnel pur, on conclut que f est surjective.

Substituons de nouveau $y = 1$ dans l'équation de départ, ce qui nous donne $f(f(x)f(1)) = f(x)$. Avec $t = f(x)$ et en utilisant la surjectivité de f, on obtient $f(tf(1)) = t$ pour tout t dans $\mathbb{R}$.

Remarquons à présent que si $f(1) = 0$, alors on obtiendrait $f(0) = t$ pour tout t dans $\mathbb{R}$, ce qui est absurde. On a donc $f(1) \neq 0$. En substituant encore $t = z/f(1)$, on obtient $f(z) = z\frac{1}{f(1)}$ pour tout z dans $\mathbb{R}$. Ainsi, les fonctions solution ont la forme $x \mapsto cx$. En injectant dans l'équation de départ, avec $x = y = 1$ on obtient $c^3 = c$ et donc $c = \pm 1$, car on a déjà exclu la fonction nulle.

On conclut de la même manière que dans la première solution. □

Solution pour les gens malins. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
Le côté gauche de l'équation est invariant si l'on remplace x par y. Il doit donc en être de même pour le côté droit. On obtient ainsi

$$xf(y) = yf(x)$$

pour tous x, y dans $\mathbb{R}$. Poser $y = 1$ donne immédiatement $f(x) = f(1)x$. On conclut comme précédemment. □

Pensez toujours à ces arguments de symétrie. Parfois ils simplifient grandement la vie !

On a à présent abordé les méthodes élémentaires les plus importantes pour la résolution d'équations fonctionnelles. C'est elles qu'il faudra tenter d'appliquer en premier lieu. Les éléments que l'on va encore présenter ici réfèrent à des exemples particuliers d'équations fonctionnelles. Elles sont donc moins générales, mais néanmoins intéressantes. Vous verrez également que les exemples s'y rapportant sont d'un niveau supérieur.

3.3 Monotonie

La monotonie est un concept naturel à propos des fonctions. On y traite de la croissance et de la décroissance des fonctions. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ (ou plus généralement, deux ensembles ordonnés). On dit d'une fonction $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ qu'elle est

1. *croissante*, si pour tous x, y dans $\mathcal{A}$ avec $x < y$, on a $f(x) \leq f(y)$.
2. *strictement croissante*, si pour tous x, y dans $\mathcal{A}$ avec $x < y$, on a $f(x) < f(y)$.

3. *décroissante*, si pour tous x, y dans $\mathcal{A}$ avec $x < y$, on a $f(x) \geq f(y)$.
4. *strictement décroissante*, si pour tous x, y dans $\mathcal{A}$ avec $x < y$, on a $f(x) > f(y)$.

Le terme *monotone* désigne une fonction qui est soit croissante, soit décroissante. De manière similaire, on dit d'une fonction qu'elle est *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

La monotonie se retrouve sous différentes formes dans la résolution des équations fonctionnelles. On le verra plus tard, la monotonie joue un rôle-clef dans l'extension d'une fonction de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$. Un autre usage de la monotonie découle de la propriété suivante :

Lemme 3.1. *Une fonction strictement monotone est injective.*

Démonstration. L'idée est assez claire et ce résultat ne devrait pas vous surprendre. Soit f une fonction strictement monotone. Par l'absurde, supposons que l'on ait $f(u) = f(v)$ pour deux valeurs $u \neq v$ de l'ensemble de départ. Sans perte de généralité, on prend $u < v$. La stricte monotonie nous dit alors que $f(u) < f(v)$ dans le cas croissant ou $f(u) > f(v)$ dans le cas décroissant. Dans tous les cas, on obtient une contradiction. □

Appliquons sans tarder ce lemme.

Exemple 26. *Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{R}$,*

$$f(x)f\left(yf(x)\right) = f(x+y).$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
Gardons les bons réflexes. Dans ce genre d'égalité, il est naturel de tenter d'égaler les termes fonctionnels. Fixons donc x et cherchons y tel que $yf(x) = x + y$. On veut donc substituer $y = \frac{x}{f(x)-1}$. La substitution est légale uniquement pour les x tels que $f(x) > 1$, car on doit s'assurer que $y > 0$. Pour de tels x, après substitution et simplification, on obtient $f(x) = 1$ qui est contradictoire. Autrement dit, il n'existe pas de x tel que $f(x) > 1$. On a donc $f(x) \leq 1$ pour tout x dans $\mathbb{R}^+$.

Appliqué à l'équation de départ, ce résultat donne $f(x+y) \leq f(x)$ pour tout x, y dans $\mathbb{R}^+$, car $f(yf(x)) \leq 1$. On déduit donc que f est une fonction décroissante. En effet, étant donné $u < v$ dans $\mathbb{R}^+$, on a $f(v) = f(u + (v-u)) \leq f(u)$, car $v - u > 0$.

Remarquons que la fonction constante 1 est solution. On ne va donc pas pouvoir déduire l'injectivité des solutions sans avoir exclu cette fonction. Supposons que l'on ait $f(a) = 1$ pour un certain $a > 0$. Alors on remarque dans un premier temps que pour $0 < x \leq a$, on a $f(x) \geq f(a) = 1$ par décroissance. Comme l'on sait déjà que $f(x) \leq 1$, on conclut donc que $f(x) = 1$ pour $0 < x \leq a$. Si l'on retourne à l'équation de départ, on remarque que si x et y sont des réels positifs inférieurs à a, alors le côté gauche est 1. Si l'on arrive à rendre $x+y$ plus grand que a, par exemple en prenant $x = y = 2a/3$, alors on va pouvoir déduire quelque chose de déterminant, en l'occurrence $f(4a/3) = 1$. Notez que $4a/3 > a$.

En répétant ce même argument, avec $4a/3$ à la place de a, et ainsi de suite, on obtient que f est identiquement 1.

On peut donc à présent supposer que $f(x) \neq 1$ pour tout x dans $\mathbb{R}^+$. Cela signifie donc que l'on a $f(x) < 1$ pour tout x dans $\mathbb{R}^+$, car on sait déjà que $f(x) \leq 1$. En répétant l'argument avec lequel on a prouvé que f était décroissante et en utilisant cette fois l'inégalité stricte $f(yf(x)) < 1$, alors on obtient que f est une fonction strictement décroissante. En particulier, f est aussi injective.

Il faut à présent mettre à profit l'injectivité de f. On doit pour cela faire disparaître un des termes du côté gauche de l'équation de départ. C'est ici que la preuve devient astucieuse. L'idée est d'utiliser l'équation de départ comme une formule qui nous permet de calculer f de la somme de deux nombres pour tenter de faire apparaître le terme $f(yf(x))$ du côté droit de l'équation. On a

$$\begin{aligned} f(x)f(yf(x)) &= f(x+y) \\ &= f\left(yf(x) + (x+y-yf(x))\right) \\ &= f(yf(x))f\left((x+y-yf(x))f(yf(x))\right), \end{aligned}$$

et donc on obtient

$$f(x) = f\left((x+y-yf(x))f(yf(x))\right).$$

Utilisons à présent l'injectivité pour simplifier par f. On obtient $x = (x+y-yf(x))f(yf(x))$ pour tout x, y dans $\mathbb{R}^+$. A présent, on voit que le problème est terminé. Substituons $x = 1$ pour obtenir

$$f(yf(1)) = \frac{1}{1+(1-f(1))y}.$$

Il reste à introduire la nouvelle variable $z = yf(1)$, qui prend bien n'importe quelle valeur réelle positive lorsque y varie dans $\mathbb{R}^+$, pour finalement établir $f(z) = \frac{1}{1+cz}$ avec $c = \frac{1-f(1)}{f(1)}$ une constante positive.

Vérifions à présent que toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{1+cx}$, avec $c \geq 0$, sont bien solution. Notez que pour $c = 0$ on retrouve la fonction constante 1. En effet, on a bien

$$\frac{1}{1+cx} \cdot \frac{1}{1+cy \cdot \frac{1}{1+cx}} = \frac{1}{1+cx+cy} = \frac{1}{1+c(x+y)}.$$

□

Voilà un solide exemple d'équations fonctionnelles. Ne paniquez pas, c'est un problème vraiment compliqué. Retenez dans un premier temps le schéma que l'on a utilisé pour montrer la monotonie et rappelez vous que l'on peut établir l'injectivité à l'aide de la monotonie stricte.

3.4 Points fixes et zéros de fonction

Tout d'abord, définissons ces points particuliers.

Soit $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ une fonction quelconque. Un élément a dans A est appelé un *point fixe* de f, si $f(a) = a$. Notez que l'on s'est assuré ici que l'ensemble d'arrivée coïncide avec l'ensemble de départ pour bien que a soit aussi un élément de l'ensemble d'arrivée, sans quoi la définition n'a pas de sens.

Quant aux zéros, si l'on se donne $f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, alors un élément a de $\mathcal{A}$ est appelé un *zéro* de la fonction f si $f(a) = 0$. À nouveau, on doit s'assurer que l'ensemble d'arrivée de la fonction contienne zéro, sans quoi la définition n'a pas grand sens.

En général, il est bon de s'intéresser aux zéros et aux points fixes des fonctions solutions si l'on a pu déduire quelque chose à leur propos. Si l'on revient à l'exemple 19, on se rappelle que l'on avait pu montrer que pour tout y dans $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{\frac{y}{f(f(y))}}$ était un point fixe de f. De plus, on avait aussi pu montrer que le seul point fixe de f était la valeur 1. Ceci avait été l'étape clef de la solution.

Voyons à présent un exemple qui nous vient de l'IMO 1994.

Exemple 27. *(IMO 1994) Trouver toutes les fonction $f\colon (-1;+\infty) \to (-1;+\infty)$, qui remplissent les deux conditions suivantes :*

(a) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ pour tous x, y dans $(-1;+\infty)$

(b) La fonction $f(x)/x$ est strictement croissante dans chacun des intervalles $(-1;0)$ et $(0;+\infty)$.

Solution. Soit f une solution qui remplit les deux conditions ci-dessus.
Posons $x = y$ dans (a), il s'ensuit

$$f(x + f(x) + xf(x)) = x + f(x) + xf(x). \tag{12}$$

Cela signifie que pour tout x dans $(-1;+\infty)$, $x + f(x) + xf(x)$ est un point fixe de f. On peut donc essayer d'établir quelque chose à propos des points fixes de f.

C'est précisément le but de la condition en (b). Par définition $a \neq 0$ est un point fixe de f si et seulement si $\frac{f(a)}{a} = 1$. D'après (b), il existe alors dans chacun des intervalles $(-1;0)$ et $(0;+\infty)$ au plus un point fixe, car la fonction $f(x)/x$ ne peut prendre qu'au plus une fois la valeur 1 dans ces deux intervalles.

Soit maintenant a un point fixe de f. Avec $x = y = a$, on obtient $f(2a+a^2) = 2a+a^2$. Par conséquent, $2a + a^2$ est aussi un point fixe de f. Dans le cas $a > 0$ on a $0 < a < 2a + a^2$, et f aurait alors au moins deux points fixes différents dans l'intervalle $(0;+\infty)$, ce qui est impossible à cause de (b). Dans le cas $-1 < a < 0$, on a de manière analogue $-1 < 2a + a^2 < a < 0$ et f aurait alors deux points fixes différents dans l'intervalle $(-1;0)$, ce qui n'est pas non plus possible.

Le seul point fixe de f est donc 0 et de l'équation (12), il s'ensuit que $x+f(x)+xf(x)=0$ pour tout x dans $(-1;+\infty)$. On obtient ainsi

$$f(x) = -\frac{x}{x+1}.$$

On montre finalement que la fonction $x \mapsto -\frac{x}{x+1}$ satisfait les deux conditions de départ. La fonction $\frac{f(x)}{x} = \frac{-1}{x+1}$ est en effet strictement croissante dans les intervalles $(-1;0)$ et $(0;+\infty)$, (b) est donc vérifiée. De plus, (a) est vérifiée car

$$\frac{-x - \frac{-y}{y+1} - x\frac{-y}{y+1}}{x + \frac{-y}{y+1} + x\frac{-y}{y+1} + 1} = \frac{y-x}{x+1} = y + \frac{-x}{x+1} + y\frac{-x}{x+1}.$$

□

Cet exemple suggérait de s'intéresser aux points fixes, sans néanmoins le mentionner explicitement. Pensez aux points fixes lorsque vous obtenez une équation du type (12). Essayez ensuite de voir si vous pouvez déduire quelque chose à propos des points fixes.

3.5 Périodicité

Avant de commencer, définissons la périodicité. Soit I un intervalle dans $\mathbb{R}$ et soit $c > 0$ un nombre réel. Une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est appelée *périodique de période* c, si pour tout $x \in I$ avec $x+c \in I$ on a $f(x+c) = f(x)$. Les premiers exemples triviaux sont évidemment les fonctions constantes. Les exemples les plus classiques de fonctions périodiques sont les fonctions sinus et cosinus. Vous voulez un autre exemple ? Prenez la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$, qui admet tout nombre entier comme période.

La notion de périodicité est parfois trompeuse, de ce fait un petit avertissement préalable. Chaque multiple entier de c est naturellement aussi une période de f. Ce qui est en revanche surprenant, c'est qu'une fonction n'a pas toujours une période minimale, contrairement aux fonctions trigonométriques par exemple. La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = 1$ si x est rationnel et $f(x) = 0$ si x est irrationnel possède par exemple n'importe quel nombre rationnel comme période. En revanche, les fonctions périodiques définies sur les entiers admettent nécessairement une période minimale (simplement parce que $\mathbb{N}$ a un élément minimal).

En général, les solutions des équations fonctionnelles ne sont pas périodiques, sauf si elles sont constantes. Bien sûr, ce n'est pas à prendre pour parole d'évangile. Mais il est vrai que lorsque l'on utilise la périodicité pour résoudre une équation fonctionnelle, c'est souvent pour montrer que la solution ne peut pas être périodique et donc déduire que toute période potentielle est donc nulle. C'est justement l'objet du premier exemple.

Exemple 28. *(France TST 2007) Trouver toutes les fonction $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tous entiers m et n,*

$$f(m + f(n) - n) = f(m) + f(n).$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
À nouveau, on le répète, lorsque toutes les variables apparaissent à l'intérieur de termes fonctionnels uniquement, il est bon de tenter d'égaler ces termes fonctionnels. Par exemple, avec $m = 2n - f(n)$, on obtient $f(n) = f(2n - f(n)) + f(n)$ et donc $f(2n - f(n)) = 0$. En particulier, zéro admet une pré-image.

On voit assez facilement que deux solutions potentielles sont la fonction nulle et la fonction $n \mapsto 2n$. Clairement la fonction nulle est solution et si en supposant que f n'est pas la fonction nulle on arrivait à prouver que f est injective en zéro (à savoir si $f(a) = 0$, alors $a = 0$), on pourrait conclure du résultat ci-dessus que $f(n) = 2n$ pour tout entier n.

Supposons donc qu'il existe $a \neq 0$ tel que $f(a) = 0$, autrement on peut conclure directement que $f(n) = 2n$ pour tout entier n. La substitution $m = n = a$ dans l'équation de base donne $f(0) = 0$. Si l'on substitue uniquement $n = a$, on obtient $f(m - a) = f(m)$ pour tout entier m. Autrement dit, f est une fonction périodique et admet tout entier $b \neq 0$ tel que $f(b) = 0$ comme période. On a établi précédemment que $f(2n - f(n)) = 0$, en particulier $2 - f(1)$ est une période de f.

Si l'on pose à présent $n = 1$ dans l'équation de base, on obtient

$$f(m + f(1) - 1) = f(m) + f(1).$$

Comme $2 - f(1)$ est une période de f (au sens large, i.e. on autorise $2 - f(1)$ à prendre n'importe quelle valeur entière), on a aussi

$$f(m + f(1) - 1) = f(m + f(1) - 1 + 2 - f(1)) = f(m + 1).$$

Autrement dit, pour tout entier m on a $f(m + 1) = f(m) + f(1)$ et donc par induction on montre que $f(m) = mf(1)$. Rappelons que f doit être périodique, elle ne peut donc être linéaire seulement si elle est constante. En effet, on a $f(m + a) = f(m)$ et donc $(m + a)f(1) = mf(1)$. Comme $a \neq 0$, on a forcément $f(1) = 0$ et donc f est la fonction nulle.

Vérifions que la fonction nulle et la fonction $n \mapsto 2n$ sont bien des solutions. En effet, dans le premier cas on a $0 = 0$ et dans le second

$$2(m + 2n - n) = 2m + 2n.$$

□

On a utilisé dans l'exemple ci-dessus que les seules fonctions linéaires périodiques sont les fonctions constantes. De manière générale, il est assez clair que toute fonction à la fois monotone et périodique doit être constante. En effet, si I est un intervalle de longueur supérieure à c, et si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone et périodique de période c, alors f est constante sur I ! C'est facile à montrer. Pour tout x dans I avec $x + c \in I$, on a $f(x + c) = f(x)$ par périodicité et à cause de la monotonie de f, également

$f(x) \leq f(y) \leq f(x+c)$ (ou $f(x) \geq f(y) \geq f(x+c)$ dans le cas décroissant) pour tous $x \leq y \leq x+c$. Par conséquent, f est constante sur chaque intervalle fermé de longueur c dans I, et donc constante sur tout l'intervalle.

Plus généralement, on n'a en fait pas besoin de la périodicité, mais seulement du fait que f prenne la même valeur en plusieurs endroits. Soit par exemple $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante pour laquelle on a $f(x) = a$ pour tous les nombres entiers non-négatifs x. Alors $f(x) = a$ est constante sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$ selon le même argument.

De telles idées peuvent parfois aider, comme on peut le voir dans l'exemple suivant :

Exemple 29. *(Shortlist* 2005*) Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, telle que pour tous x, y dans $\mathbb{R}^+$,*

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)).$$

Solution. Soit f une solution de l'équation ci-dessus.
Dans cet exercice, il n'est pas du tout clair par où on doit commencer. La fonction constante $f(x) = 2$ est clairement une solution. Mais est-elle la seule ? Si on observe plus précisément, il y a encore deux questions relativement naturelles que l'on peut se poser :

(1) Est-il possible de trouver un y tel que la parenthèse de droite prenne la même valeur pour deux x différents ? Cela amènerait probablement à une identité dont on pourrait se servir. Donnons-nous donc $0 < u < v$ et cherchons y tel que $u + yf(u) = v + yf(v)$. En résolvant, on trouve :

$$y = \frac{v-u}{f(u)-f(v)}.$$

Pour que la substitution soit légale, on doit avoir $f(u) > f(v)$. En supposant que ce soit le cas, le côté droit de l'équation de départ prend la même valeur pour $x = u$ ou $x = v$. Ça doit donc aussi être le cas pour le côté gauche de l'équation. Comme $f(y) \neq 0$, cela implique que $f(u) = f(v)$. En résumé, nous avons démontré que s'il existe $0 < u < v$ avec $f(u) > f(v)$, alors $f(u) = f(v)$; ce qui est bien entendu absurde. Ainsi, pour tout $u < v$ on a $f(u) \leq f(v)$. Nous avons donc prouvé (d'une manière quelque peu surprenante) que f est croissante.

(2) Que se passe-t-il si f prend la même valeur à deux endroits différents ? Soit donc $0 < u < v$ avec $f(u) = f(v)$. Pour tout $y > 0$, on a alors

$$2f(u + yf(u)) = f(u)f(y) = f(v)f(y) = 2f(v + yf(v)).$$

Cela semble impliquer une sorte de périodicité, de période $c = v - u$. En réalité : Soit $z > u$ un nombre quelconque, et remplaçons $y = \frac{z-u}{f(u)} > 0$ dans cette équation, on obtient alors $f(z) = f(u + yf(u)) = f(v + yf(v)) = f(z + c)$. De ce fait, f est périodique dans l'intervalle $(u; +\infty)$ et selon (1), également croissante. Elle est par conséquent constante. Remplaçons maintenant $x, y > u$ dans l'équation initiale (notez que si $x, y > u$, alors $x + yf(x) > u$). Il s'ensuit alors que cette constante vaut 2. C'est presque ce que nous souhaitons. f est constante seulement à partir de u, mais il est facile de voir que f l'est aussi à partir de 0. En effet, prenons y quelconque et $x > u$, en substituant dans l'équation de départ, il s'ensuit directement, car $x+yf(x) > u$, que l'on a $f(y) = 2$. Finalement, on a bien $f(y) = 2$ pour tout $y > 0$.

On doit donc encore montrer qu'il existe deux nombres réels différents pour lesquels f prend la même valeur et on aura terminé. On suppose que ce n'est pas le cas, c'est-à-dire, on suppose que f est injective.

Utilisons encore la symétrie du côté gauche de l'équation. On a

$$2f(x + yf(x)) = f(x)f(y) = f(y)f(x) = 2f(y + xf(y)),$$

On obtient donc $x + yf(x) = y + xf(y)$, car f est injective. Avec $y = 1$ on obtient alors $f(x) = (f(1) - 1)x + 1$ pour tout $x > 0$. Cependant, en substituant dans l'équation de départ, on remarque que ces fonctions ne sont pas des solutions.

Il reste à vérifier que la fonction constante 2 est bien une solution. C'est le cas, car $2 \cdot 2 = 2 \cdot 2$. □

3.6 L'exhaustivité des solutions et nouvelles fonctions

Quand on résout une équation fonctionnelle, il est important d'essayer de deviner des solutions élémentaires dès le début. Ce procédé peut avoir une grande influence sur la stratégie que l'on va appliquer par la suite. On l'a vu, si certaines fonctions constantes sont solutions, alors on ne va pas essayer de montrer que les solutions sont injectives avant d'avoir exclu les fonctions constantes. De même pour les propriétés de surjectivité, de monotonie ou de point fixe.

Très souvent on arrive à deviner une solution et on est convaincu qu'elle est unique. Dans ce cas-là on peut essayer de montrer directement que l'équation ne peut avoir qu'une seule solution. Un premier exemple sont les relations d'induction. En effet, si l'on aboutit à une équation qui permet de calculer $f(n + 1)$ à partir de $f(n), \dots, f(0)$ et que l'on a pu calculer les n valeurs de base, alors ces conditions nous assure, entre autre, l'unicité de la solution. On pourrait donc à ce stade simplement trouver une fonction solution de l'équation de départ et s'épargner l'induction. Très souvent, la différence d'effort est minime.

Voyons ici un autre exemple plus direct.

Exemple 30. *Déterminer toutes les solutions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{R}$*

$$f(xy) + x^2 + y^2 = xy + f(x^2) + f(y^2).$$

Méthode classique. Soit f une solution de l'équation de base.
La méthode classique est un jeu de substitutions. Avec $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 0$. Avec ensuite $y = 0$, on obtient $f(x^2) = x^2$. Utilisons cette équation pour simplifier

l'équation de départ et obtenir $f(xy) = xy$. Finalement, $y = 1$ dans cette dernière égalité donne $f(x) = x$.

La fonction identité est naturellement une solution, car $xy + x^2 + y^2 = xy + x^2 + y^2$.

$\square$

Solution par unicité. Tentons de montrer que l'équation fonctionnelle ne peut avoir qu'au plus une solution. Pour cela, on suppose que f_1 et f_2 sont deux solutions et on pose $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$. En soustrayant les équations pour f_1 et f_2, on obtient l'équation plus simple

$$g(xy) = g(x^2) + g(y^2)$$

pour g. Avec $x = y = 0$, on en tire que $g(0) = 0$. En posant $y = 0$, on obtient $g(x^2) = 0$, autrement dit $g(z) = 0$ pour tout $z \geq 0$. Pour finir, on pose $y = 1$, ce qui donne $g(x) = g(x^2) + g(1) = 0 + 0 = 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Ainsi, on a bien $f_1 = f_2$ qui démontre que s'il existe une solution, alors elle est unique. Comme $x \mapsto x$ satisfait l'équation de départ, c'est donc l'unique solution.

$\square$

Une autre possibilité est d'introduire de nouvelles fonctions, un peu comme la fonction g dans la solution ci-dessus. En général, il est beaucoup plus simple de montrer qu'une équation donnée n'a que des solutions constantes ou du type $f(x) = cx$, plutôt que des solutions plus compliquées comme par exemple $f(x) = 2x + 1$ ou encore $f(x) = x^4 - 3x$. Cela prendra encore plus de sens lorsque l'on cherchera à transformer une équation fonctionnelle en équation de Cauchy. On peut donc parfois tenter d'exprimer la fonction cherchée à travers une autre plus simple. Voici une troisième solution pour le dernier exemple.

Troisième solution. Soit f une solution de l'équation de base.
Nous savons déjà que $f(x) = x$ est une solution et nous aimerions montrer qu'il n'y a pas d'autres. On introduit une nouvelle fonction g en posant $g(x) = f(x) - x$. En substituant dans l'équation de base, on obtient l'équation plus simple

$$g(xy) = g(x^2) + g(y^2)$$

pour g. La deuxième solution nous a montré que g était identiquement nulle. On conclut donc qu'on a bien $f(x) = x + g(x) = x$. $\square$

Une autre variante aurait été de définir g par $f(x) = xg(x)$. Attention, cette substitution implique que $f(0) = 0$ (posez simplement $x = 0$) ! On ne peut donc la faire qu'en sachant que $f(0) = 0$, ce qui est facile à montrer. On n'a alors pas du tout besoin de connaître la valeur de $g(0)$. Ici cette substitution nous donne une équation qui est plus compliquée que celle de f, mais parfois elle peut tout de même s'avérer utile.

Ce procédé n'a de sens que si l'on est suffisamment convaincu que la solution trouvée est unique. Dans le cas de l'exemple 17, il est par exemple facile de voir que $x \mapsto 0$ et $x \mapsto x^2$

sont les deux des solutions. On gagnerait donc peu en définissant g par $f(x) = x^2 - g(x)$, car il faudrait toujours montrer que g est soit identiquement nulle, soit $g(x) = x^2$, ce qui est au moins aussi difficile que l'exercice qu'on avait à la base. Si on avait vraiment voulu faire une substitution, on aurait eu meilleur temps de poser $f(x) = x^2/2 + g(x)$. De cette façon on aurait au moins gagné une certaine symétrie (les solutions auraient été $g(x) = \pm x^2/2$).

La situation est tout autre dans l'exemple 6, où on a toute une famille de solutions, celle des fonctions du type $f(x) = c/x$ avec une constante positive arbitraire c. Cela apporte donc peu d'essayer de montrer que la solution est uniquement déterminée (ce n'est justement pas le cas) et ça a tout aussi peu de sens de faire une substitution du genre $g(x) = xf(x)$. Le raisonnement qui peut parfois porter ses fruits est le suivant : on remarque que la somme de deux fonctions solutions est à son tour une fonction solution. On le voit en additionnant les équations appliquées avec les fonctions correspondantes. De même, tout multiple scalaire d'une solution est également une solution. Ainsi, on pourrait introduire $g(x) = f(x)/f(1)$ (en s'assurant que $f(1) \neq 0$). L'équation pour g est exactement la même que pour f, mais on a immédiatement $g(1) = 1$ (posez $x = 1$ dans la formule de substitution). Ce n'est pas le cas pour une solution quelconque, il peut donc arriver que cette information supplémentaire nous restreigne à une solution unique. Typiquement, ici, on doit montrer que g est la fonction inverse $1/x$.

Dans cet exemple, le gain d'information est minimal. Ce procédé est toutefois un outil puissant quand rien d'autre ne semble fonctionner. Gardez à l'esprit qu'introduire une nouvelle fonction est rarement une avancée décisive vers la solution. Elle permet, lorsqu'elle est correctement exécutée, de percevoir le problème différemment, et donc d'avoir une meilleure intuition pour trouver les manœuvres-clef à la résolution de l'équation fonctionnelle.