Tour préliminaire 2020

Solutions

Remarque liminaire : Une solution complète rapporte 7 points. Pour chaque problème, jusqu'à 2 points pourront être déduits d'une solution correcte en cas de lacunes mineures. Les solutions partielles sont évaluées selon le barème suivant.

Ci-dessous vous trouverez les solutions élémentaires connues des correcteurs. Des solutions alternatives sont présentées à la fin de chaque problème. Les étudiants sont naturellement encouragés à essayer toutes les méthodes à leur disposition lors de l'entrainement, mais sont également avisés de ne pas chercher de solutions alternatives qui emploient des méthodes qu'ils ne maîtirent pas en condition d'examen, au risque de perdre un temps précieux.

G1) Soit k un cercle de centre O. Soient A, B, C et D quatre points distincts sur k, dans cet ordre, tels que AB est un diamètre de k. Le cercle circonscrit au triangle COD intersecte AC une deuxième fois en P. Montrer que OP et BD sont parallèles.

Solution 1 (Louis), Chasse aux angles :

On va montrer que $\angle ODB = \angle POD$. Cela prouve que les droites sont parallèles.

Comme O est le centre du cercle, on a $OD = OB$ et donc le triangle ODB est isocèle en O. Donc $\angle ODB = \angle OBD$. Comme O se trouve sur le segment AB, $\angle OBD = \angle ABD$. Les points A, B, C, D étant sur un même cercle, on a $\angle ABD = 180° - \angle ACD = \angle PCD$. Finalement, les points C, O, D, P se trouvent sur un même cercle et donc $\angle PCD = \angle POD$. On a donc bien

$$\angle ODB = \angle POD.$$

Marking Scheme

Pour les solutions partielles, on attribuera les points additifs suivants ($\leq$ 4P) :

(a) Forward points :

Remarque : Pour les relations d'angles qui suivent, des angles bien marqués sur un dessin propre **ne sont pas** suffisants. Les relations doivent se trouver explicitement ailleurs.

- +1P : établir une relation d'angles dans les quadrilatères inscrits $ABCD$ **ou** $CPDO$ (eg. $\angle PCD = \angle POD$ ou $\angle DBA = \angle ACD$)
- +1P : établir une relation d'angles en combinant les quadrilatères inscrits $ABCD$ **et** $CPDO$ (eg. $\angle PCD = \angle DBA$)
- +1P : établir une relation d'angle en utilisant que O est le centre du cercle $ABCD$ (eg. $\angle ODB = \angle OBD$)

(b) Backward points :

- +1P : reformuler la conclusion en termes d'angles (eg. $\angle POD = \angle ODB$ ou $\angle DBA = \angle POA$)

Alternative solutions

Solution 2 (Tanish), Nine-point circle :

Let X be $AC \cap BD$ and Q be the second intersection of BD and (COD). We will prove that (COD) is the nine-point circle of AXB. But this is clear - O is the midpoint of AB, D is the base of the altitude dropped from B (Thales) and C is the base of the altitude dropped from A (Thales). It follows that P and Q are the midpoints of AX and BX respectively, and $XPOQ$ is a parallelogram.

Solution 3 (Tanish), Inversion :

Let us invert about k. AC is sent to the circumcircle of OAC ; the circumcircle of OAD is sent to DC. This means that P' is the intersection of these two. OP is sent to the line OP' and BC is sent to BC, so it suffices to prove that $OP' \parallel BD$. This is equivalent to $\angle AOP' = \angle ABD$. Since $\angle ABD = 2\angle AOD$, we simply have to prove OP' bisects $\angle AOD$, or that (as $AO = OD$), OP' bisects $\angle AP'D$. However this last statement is clearly true when you consider the circumcircle of $AODP'$ as $\angle OP'A$ subtends the arc $\overset{\frown}{OA}$ and $\angle OP'D$ subtends the arc $\overset{\frown}{OC}$, which are of equal length as $OA = OC$.

Note : OP is the same line as OP' and therefore you could equally prove that OP bisects AOD or APD, but this is not as trivial.

G2) Soit ABC un triangle avec $AB > AC$. Les bissectrices en B et C s'intersectent en un point I à l'intérieur du triangle ABC. Le cercle circonscrit au triangle BIC intersecte une deuxième fois AB en X et intersecte une deuxième fois AC en Y. Montrer que CX est parallèle à BY.

Solution 1 (Arnaud), Chasse aux angles :

On va montrer que $\angle ACX = \angle AYB$. Cette condition est suffisante pour conclure que les droites sont parallèles. On va supposer pour notre preuve que X se trouve entre A et B et que Y ne se trouve pas entre A et C.

Comme CI est la bissectrice de $\angle ACB$, on a $\angle ACI = \angle ICB$. Les points $ICYB$ se trouvent sur un même cercle, donc $\angle ICB = \angle IYB$. On obtient ainsi

$$\angle ACI = \angle IYB.$$

Comme les points $ICYB$ sont sur un même cercle, on a aussi $\angle CYI = \angle CBI$. La droite IB est la bisectrice de l'angle $\angle CAB$, donc $\angle CBI = \angle IBA$. Le point X se trouve entre A et B, donc $\angle IBA = \angle IBX$. Enfin, comme les points $XBCI$ se trouvent sur un même cercle, on a $\angle IBX = \angle ICX$. Donc

$$\angle CYI = \angle ICX.$$

En conclusion

$$\angle ACX = \angle ACI + \angle ICX = \angle IYB + \angle CYI = \angle CYB = \angle AYB.$$

Pour la dèrnière égalité, on a utilisé que C se trouve entre A et Y.

Solution 2 (Arnaud), Thalès :

Dans cette solution, on va montrer que $AX/AB = AC/AY$. Par le théorème de Thalès, on conclut que les droites XC et BY sont parallèles.

Comme le quadrilatère $XICB$ est inscrit et X se trouve entre A et B, on a $\angle AXI = \angle BCI$. Puisque CI est la bisectrice de l'angle en C, on a $\angle BCI = \angle ICA$. Finalement,

$$\angle AXI = \angle ACI.$$

A nouveau, en utilisant que le quadrilatère $XICB$ est inscrit et IB est la bisectrice de l'angle en B, on obtient

$$\angle ICX = \angle IBX = \angle IBC = \angle IXC.$$

En combinant ces deux relations et en utilisant que X se trouve entre A et B, on obtient,

$$\angle AXC = \angle AXI + \angle IXC = \angle ACI + \angle ICX = \angle ACX,$$

et le donc le triangle ACX est isocèle en A. C'est-à-dire, $AX = AC$. Il y a à présent de multiple façons de conclure. Par exemple :

(a) Comme $XCYB$ est inscrit, le théorème de la puissance donne $AX \cdot AB = AC \cdot AY$. Or $AX = AC$, donc $AB = AY$. Ainsi on a bien $AX/AB = AC/AY$.

(b) Comme $XCYB$ est inscrit, on obtient $\angle XBY = \angle ACX$ et $\angle AXC = \angle CYB$. Comme le triangle AXC est isocèle en A, $\angle AXC = \angle ACX$ et donc $\angle XBY = \angle CYB$. Ou encore, $\angle ABY = \angle AYB$. Donc le triangle ABY est isocèle en A et ainsi $AB = AY$. On conclut comme précédemment.

Marking Scheme :

Les solutions partielles sont jugées de la manière suivante : Points partiels additifs (≤ 3P) :

(a) Forward points :

- +1P : établir une relation d'angles dans un quadrilatère inscrit avec quatre sommets parmi $\{X, I, C, Y, B\}$
- +1P : établir une relation d'angles dans **un autre quadrilatère inscrit** avec quatre sommets parmi $\{X, I, C, Y, B\}$
- +1P : une égalité d'angles qui emploie à la fois un quadrilatère inscrit avec quatre sommets parmi $\{X, I, C, Y, B\}$ et et une des bisectrices $\{CI, BI\}$
- +2P : montrer que le centre du cercle passant par B, X, I, C, Y correspond a l'intersection de AI avec le cercle circonscrit de ABC

(b) Backward points :

- +0P : reformuler la conclusion en termes d'angles (eg. $\angle ACX = \angle AYB$) ou en termes de longueurs ($AX/AB = AC/AY$)
- +1P : reformuler la conclusion en termes d'angles *avec décomposition* (eg. $\angle ACI = \angle IYB$ et $\angle ICX = \angle AYI$) ou en termes de longueurs ($AX = AC$ et $AB = AY$)

Résultats partiels (non-additifs avec les points précédents, ≥ 4P) :

(a) Résultats partiels valant 4P :

- montrer que ACX est isocèle et déduire que $AX = AC$, ou
- montrer que ABY est isocèle et déduire que $AB = AY$

(b) Résultats partiels valant 5P :

- montrer que $AX = AC$ et $AB = AY$
- montrer que $\angle ACX = \angle AYB$ ou tout autre relation d'angles qui permet de conclure directement que les droites sont parallèles

Remarque : On ne demande pas de démontrer que X se trouve entre A et B, et que C se trouve entre A et Y.

Alternative solutions

Solution 3 (Tanish), Incenter-Excenter Lemma :

The Incenter-Excenter Lemma tells us that if we prolong AI until it intersects the circumcircle of ABC at I_A, I_A happens to be the circumcenter of BIC. There are multiple ways to conclude, one of which is to take the reflection across the line AI_A, which sends A to A, B to Y and C to X (as the lines AB and AC are swapped and the circle (BIC) is preserved) and it immediately follows that $BY \parallel CX$.

K1) On considère un carré blanc 5×5 composé de 25 carrés unité. De combien de manières différentes peut-on colorier un ou plusieurs carrés unité en noir de telle manière que la surface noire obtenue soit un rectangle ?

Solution 1 (Tanish), Compter les sommets opposés : On considère les sommets d'un rectangle quelconque. Ils sont situés sur une grille, qui est un groupe de 36 points dans un carré 6×6. On choisit un de ces points comme premier sommet de notre rectangle. Si maintenant on choisit le sommet opposé, alors la paire formée par ces deux points suffit à définir le rectangle. Le sommet opposé ne peut pas être dans la même ligne ni dans la même colonne, donc est choisi parmi les 25 points restants. En répétant le calcul pour tous les 36 points, on a 36×25 paires de points. Cependant on a compté chaque rectangle 4 fois - il y a deux paires différentes de sommets opposés, qui ont chacune été comptées deux fois (ce sont des paires ordonnées) - il faut donc diviser notre produit par 4 pour obtenir $9 \times 25 = 225$.

Remarque (Jana) : Il est également possible de compter les choix possibles pour les sommets opposés de la manière suivante : on choisit d'abord deux points distincts dans la grille 6×6. Il y a $\binom{36}{2} = 18 \cdot 35$ possibilités différentes. Ensuite il faut soustraire celles où les deux points sont situés sur la même ligne ou la même colonne. Puisqu'il y a 6 lignes et 6 colonnes et que dans les deux cas on a $\binom{6}{2}$ choix possibles, le nombre qu'il faut soustraire est $12 \cdot \binom{6}{2} = 12 \cdot 15$. On remarque encore qu'en procédant ainsi chaque rectangle est compté deux fois, donc le résultat final est $\frac{1}{2} \cdot (18 \cdot 35 - 12 \cdot 15) = 225$.

Solution 2 (Tanish), Compter par hauteur et largeur : On considère le nombre de rectangles possibles de dimension $a \times b$, où a est la hauteur et b la largeur. Le carré en haut à gauche peut être n'importe quel carré du rectangle $(6 - a) \times (6 - b)$ placé en haut à gauche de la grille, car autrement le rectangle ne sera pas entièrement contenu dans le carré. Ainsi le nombre total de possibilités est

$$\sum_{a=1}^{5}(6-a)\sum_{b=1}^{5}(6-b) = \sum_{a=1}^{5}(6-a) \cdot 15 = 15 \cdot 15 = 225$$

De manière symétrique, on peut aussi considérer les positions possibles du carré en haut à droite, en bas à gauche ou en bas à droite en fonction des dimensions du rectangle.

Solution 3 (Tanish), Compter par lignes/colonnes des côtés : Notre rectangle est déterminé par le choix de deux lignes et deux colonnes sur la grille (les lignes représentent les côtés horizontaux et les colonnes représentent les côtés verticaux). On peut choisir parmi 6 lignes et 6 colonnes, donc le nombre total de possibilités est $\binom{6}{2} \cdot \binom{6}{2} = 15^2 = 225$.

Solution 4 (Tanish), Compter par le carré en haut à droite : On numérote nos carrés avec les coordonnées (x, y), avec $(1, 1)$ désignant le carré en bas à gauche et $(5, 5)$ le carré en haut à droite. Maintenant regardons tous les rectangles dont le coin en haut à droite est (a, b). Le rectangle est défini par le choix de son carré en haut à droite et de son carré en bas à gauche, donc il suffit de choisir un autre carré $(\leq a, \leq b)$, ce qui donne $a \cdot b$ possibilités. Par conséquent, en additionnant le nombre de possibilités pour tous les (a, b) possibles, on obtient

$$\sum_{a=1}^{5} a \sum_{b=1}^{5} b = \sum_{a=1}^{5} a \cdot 15 = 15 \cdot 15 = 225$$

De manière symétrique, cette preuve fonctionne aussi en considérant le carré en haut à gauche, en bas à droite ou en bas à gauche.

Solution 5 (Tanish), Compter par le petit côté : On compte tous les rectangles dont le petit côté a pour longueur x. Le principe d'inclusion-exclusion nous dit qu'il faut compter le nombres de rectangles de hauteur x et de largeur $\geq x$ plus le nombre de rectangles de largeur x et de hauteur $\geq x$ moins le nombre de rectangles de largeur *et* de hauteur x. Par le résultat de la deuxième solution on sait déjà que le nombre de rectangles de dimension $a \times b$ est $(6-a)\cdot(6-b)$, donc on a

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{5}\left((2\cdot\sum_{y=x}^{5}\left((6-y)\cdot(6-x)\right)-(6-x)(6-x)\right) &= \sum_{x=1}^{5}(6-x)(1+2+\ldots(6-x)\ldots...+2+1)\\
&= \sum_{x=1}^{5}(6-x)(6-x)^2\\
&= \sum_{x=1}^{5}(6-x)^3\\
&= 125+64+27+8+1=225
\end{aligned}$$

Une preuve similaire est possible si on compte d'après le grand côté.

Les 5 solutions ci-dessus peuvent être généralisées au cas d'un carré $n \times n$.

Marking scheme

- 1P : Affirmer que la réponse est 225 (ce point peut être additionné aux autres points ci-dessous)

Les points ci-dessous sont non-additifs.

- 1P : énumérer les carrés (p. ex. mettre des coordonnés) ou séparer les rectangles en ensembles disjoints.
- 3P : Trouver une manière de décrire chaque rectangle de manière unique (p. ex. en choisissant des sommets opposés, en choisissant lignes et colonnes, en choisissant la position du coin en haut à droite et les longueurs des côtés etc.)
- 4P : Formule qui compte chaque rectangle le même nombre de fois, avec justification.
- 4P : Séparer les rectangles en ensembles disjoints et compter le nombre de rectangles dans chaque ensemble.
- 5P : Formule qui compte le nombre exact de rectangles, avec justification.

Sans formule correct, au plus 4 points pourront être obtenus. Si des sommes non-triviales ne sont pas calculées explicitement il ne sera pas possible d'obtenir les 7 points.

Alternative solutions

Solution 6 (Tanish), General proof by induction using bijections : Let us prove the general result that the number of rectangles in a $n \times n$ square is $\sum_{i=1}^{n} i^3$. For the base case, there is clearly only 1 possible rectangle in a 1×1 square. Now suppose the proposition holds true for the case n. Now expand the grid to an $(n+1) \times (n+1)$ grid by adding a column on the right and a row on top. For every rectangle possible in the case n we now modify it by moving its top-right corner one column up and to the right. This application represents a bijection between the rectangles in the case n and the rectangles in the case $n+1$ without a side of length 1 (this can be verified by seeing that both the application and its inverse are surjective). It remains to count the "new" rectangles, or those with at least one side of length 1. These are well-defined by the choice of a square and then a square in the same row or column to represent the "ends" of the rectangle (the second square can be the same as the first one!), and this method counts every rectangle twice. We have n^2 choices for the first square and $2n$ choices for the second square after that (n in the same row, n in the same column) giving a total of $2n^3$ new rectangles, which we divide by 2, to give n^3.
Note : It is possible to use this same method for solution 5 to count the number of rectangles of smaller side x, as these rectangles are well defined by the choice of two $x \times x$ squares in the same columns or rows (again, counting each rectangle twice).

K2) Dans le village Roche vivent 2020 personnes. Un jour, le fameux mathématicien Georges de Rham fait les observations suivantes :

- Chaque villageois connaît un autre villageois du même âge que lui.
- Chaque groupe de 192 personnes dans le village contient toujours au moins trois personnes qui ont le même âge.

Montrer qu'il existe un groupe de 22 villageois qui ont tous le même âge.

Solution : On prouve qu'il y a au plus 95 âges différents : on suppose qu'il y plus de 96 âges différents. Comme chaque villageois connaît quelqu'un qui a le même âge que lui, on peut former un groupe de 192 villageois dans lequel on ne peut pas trouver un groupe de trois personnes qui ont le même âge. Cela contredit la deuxième hypothèse. Donc il existe au plus 95 âges différents. On applique le principe des tiroirs. Il existe un groupe d'âge dans lequel il y a au moins $\lceil \frac{2020}{95} \rceil = 22$ personnes. Remarque : Ce résultat est aussi valable pour 96 âges différents, donc le cas maximal est un groupe de 194 personnes.

Marking Scheme : Les deux premiers points ne sont pas additifs.

- 2P : Montrer qu'il suffit de traiter le cas dans lequel il y a au plus k âges différents, pour $k \in \{95, 96\}$
- 1P : Montrer qu'il suffit de traiter le cas dans lequel il y a au plus k âges différents, pour $k \in \{92, 93, 94\}$
- 5P : Montrer qu'il y a au plus k âges différents, avec $k \in \{95, 96\}$

Z1) Si $p \geq 5$ est un nombre premier, soit q le plus petit nombre premier tel que $q > p$ et soit n le nombre de diviseurs positifs de $p + q$ (1 et $p + q$ inclus).

a) Montrer que quel que soit le choix de p, le nombre n est toujours plus grand ou égal à 4.

b) Trouver la véritable valeur minimale m que peut prendre n parmi tous les choix possibles pour p. C'est-à-dire :

b_1) Donner un exemple d'un nombre premier p pour lequel la valeur m est atteinte.

b_2) Montrer qu'il n'existe pas de nombre premier p tel que n soit strictement inférieur a m.

Solution (Louis) : Puisque $p \geq 5$ les deux nombres premiers p, q sont tous les deux impairs, donc leur somme $p+q$ est paire, et ainsi $p+q$ est divisible par $1, 2, \frac{p+q}{2}, p+q$. De plus, $p+q > 4$ donc les 4 diviseurs donnés sont distincts, ce qui prouve la partie a).

Pour la partie b_1) on essaye les petites valeurs de p et on constate que n n'est jamais inférieur à 6 et que $p+q$ admet 6 diviseurs lorsque $p = 5$, $q = 7$ par exemple. En effet dans ce cas $p+q = 12$ a pour diviseurs les nombres $1, 2, 3, 4, 6, 12$.

Finalement pour b_2) l'observation cruciale est que $\frac{p+q}{2}$ n'est pas un nombre premier. En effet, puisque p et q sont deux nombres premiers consécutifs, et que $p < \frac{p+q}{2} < q$, ce nombre ne peut pas être un nombre premier. Il y a donc les situations suivantes à étudier :

- Si $\frac{p+q}{2}$ est divisible par deux nombres premiers distincts $s, t \neq 2$, alors $p+q$ est divisible par les nombres $1, 2, s, t, 2s, 2t, st, 2st$, et admet potentiellement d'autres diviseurs. Ainsi dans ce cas $p + q$ admet au moins 8 diviseurs positifs distincts et $8 > 6$.
- Si $\frac{p+q}{2}$ est divisible par $2s$ avec $s \neq 2$ un nombre premier, alors $p + q$ est divisible par $1, 2, 4, s, 2s, 4s$, et admet potentiellement d'autres diviseurs. En particulier $p+q$ est divisible par au moins 6 diviseurs.
- Si $\frac{p+q}{2}$ est divisible par s^2 avec $s \neq 2$ un nombre premier, un raisonnement similaire au cas précédent prouve que $p + q$ admet au minimum 6 diviseurs.
- Si $\frac{p+q}{2}$ est une puissance de 2, alors c'est aussi le cas de $p + q$. Puisque $32 = 2^5$ admet 6 diviseurs distincts, il suffit de prouver qu'il est impossible d'obtenir une puissance de 2 inférieure à 32. Puisque $5 \leq p < q$, il s'ensuit que $p + q > 8$, donc il suffit d'exclure le cas $p + q = 16$. Pour cela on constate que $5 + 7 = 12 < 16$ et $7 + 11 = 18 > 16$. Si l'on prend $p > 7$ la somme obtenue sera encore plus grande donc on ne peut jamais obtenir $p+q = 16$.

Marking Scheme

- 1P : Prouver que $n \geq 4$.
- 1P : Affirmer que la valeur correcte est $m = 6$ avec un exemple explicite.
- 2P : Prouver que $\frac{p+q}{2}$ n'est pas un nombre premier.
- +3P : Conclure.

Si dans la dernière étape de la preuve au moins une situation possible n'est pas traitée, cela ne sera pas considéré comme une erreur mineure et il ne sera pas possible d'obtenir plus que 5 points.

Z2) Soit p un nombre premier et soient a, b, c et n des entiers strictement positifs tels que $a, b, c < p$ et tels que les trois relations suivantes soient satisfaites :

$$p^2 \mid a + (n-1) \cdot b, \qquad p^2 \mid b + (n-1) \cdot c, \qquad p^2 \mid c + (n-1) \cdot a.$$

Montrer que n n'est pas un nombre premier.

Solution 1 (Louis) : L'idée importante ici est d'additionner les trois relations de divisibilité. On obtient alors

$$p^2 \mid \big(a + (n-1) \cdot b\big) + \big(b + (n-1) \cdot c\big) + \big(c + (n-1) \cdot a\big) = n \cdot (a + b + c).$$

De plus, puisque $a, b, c < p$ on a $a+b+c \leq 3p-3 < 3p$ et donc si $p \geq 3$ on obtient $a+b+c < p^2$. On en déduit en particulier que p^2 ne divise pas $a+b+c$ et donc il faut que $p \mid n$. On écrit donc $n = k \cdot p$ (et alors n est un nombre premier si et seulement si $k = 1$). En utilisant la première relation on obtient $p^2 \mid a + (kp-1) \cdot b = a - b + kpb$. En particulier il faut donc que $p \mid a - b$, et puisque a, b sont tous les deux strictement inclus entre 0 et p la seule possibilité est $a = b$. En utilisant une dernière fois la première relation on obtient désormais $p^2 \mid a + nb - b = nb$ et puisque b est premier avec p (car $b < p$), il s'ensuit que $p^2 \mid n$, autrement dit n n'est pas un nombre premier.

À ce moment il est important de relire la solution et de constater que pour le moment on a seulement une solution pour $p \geq 3$ et qu'il manque encore le cas $p = 2$. Dans ce cas on a automatiquement $a = b = c = 1$, et donc en remplaçant dans la première relation de divisibilité on obtient directement $p^2 \mid n$ et donc n n'est pas un nombre premier.

Solution 2 (David) : Comme dans la solution précédente on commence par prouver que $p \mid n$. À partir de là n peut être un nombre premier uniquement si $n = p$. On suppose donc par l'absurde que $n = p$. Si on regarde la première relation de divisibilité, on a nécessairement $p^2 \leq a+(n-1)\cdot b$. Or, puisque $a, b < p$ on a d'autre part $a + (n-1) \cdot b = a + (p-1) \cdot b < p + (p-1) \cdot p = p^2$. Autrement dit, on obtient donc $p^2 < p^2$, ce qui donne la contradiction désirée.

Comme dans la précédente solution il faut encore considérer le cas $p = 2$. La même preuve que précédemment permet de finir l'exercice.

Marking Scheme :

- 2P : Prouver que $p^2 \mid n \cdot (a + b + c)$.
- +2P : Prouver que $p \mid n$.
- +2P : Prouver que $a = b$ **ou** que $a + (n-1)b < p^2$ (ou toute autre observation qui permet de facilement terminer la preuve)
- +1P : Conclure.

Une pénalité de 1 point sera appliquée aux solutions qui fonctionnent pour tous les nombres premiers sauf un nombre fini d'entre eux.