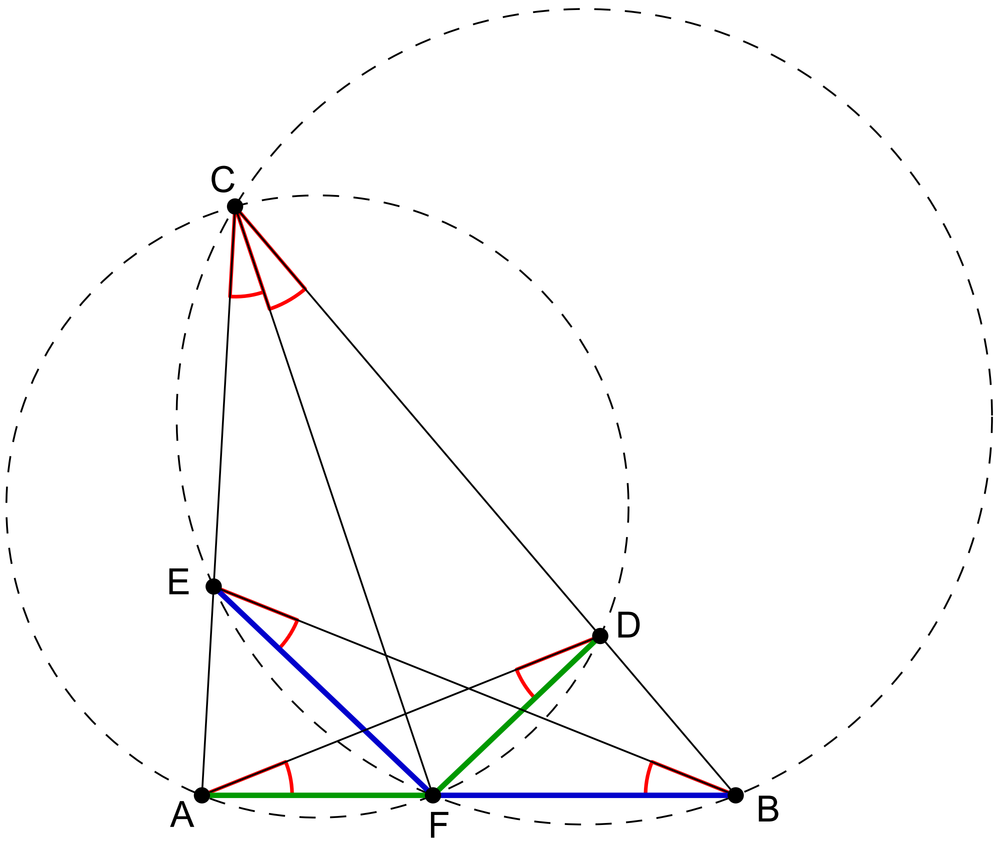
SMO - Vorrunde 2018 - Lösungen

-

G1) Sei ABC ein Dreieck und sei $\gamma = \angle ACB$, sodass $\gamma/2 < \angle BAC$ und $\gamma/2 < \angle CBA$ gilt. Sei D der Punkt auf der Strecke BC, sodass $\angle BAD = \gamma/2$ gilt. Sei E der Punkt auf der Strecke CA, sodass $\angle EBA = \gamma/2$ gilt. Ausserdem sei F der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ACB$ und der Strecke AB. Zeige, dass $EF + FD = AB$ gilt.

Lösung (Clemens): Wegen $\angle FAD = \angle BAD = \gamma/2 = \angle FCD$ liegen die Punkte A, F, D, und C auf einem Kreis, das heisst $AFDC$ ist ein Sehnenviereck. Mit dem Peripheriewinkelsatz folgt nun $\angle ADF = \angle ACF = \gamma/2 = \angle FAD$. Hieraus folgt wiederum, dass das Dreieck AFD gleichschenklig ist und somit muss $AF = FD$ gelten.
Ganz analog folgt aus $\angle EBF = \angle EBA = \gamma/2 = \angle ECF$, dass $BCEF$ ebenfalls ein Sehenviereck ist. Daraus folgt $\angle FEB = \angle FCB = \gamma/2 = \angle EBF$, und somit ist auch das Dreieck EFB gleichschenklig mit $EF = FB$.
Nun können wir die beiden Gleichungen kombinieren und erhalten:

$$EF + FD = FB + AF = AB$$



Marking Scheme

- 2P: $AFDC$ Sehnenviereck oder $FBCE$ Sehnenviereck
- 1P: $\angle ADF = \gamma/2$ oder $\angle FCB = \gamma/2$
- 2P: ΔAFD gleichschenklig mit $AF = FD$ oder analog ΔEFB gleichschenklig
- 1P: Beide gleichschenkligen Dreiecke
- 1P: fertig machen.

G2) Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit Umkreismittelpunkt O, sodass die Diagonalen AC und BD senkrecht aufeinander stehen. Sei g die Spiegelung der Diagonalen AC an der Winkelhalbierenden von $\angle BAD$. Zeige, dass der Punkt O auf der Geraden g liegt.

Erste Lösung (Henning): Sei A' der zweite Schnittpunkt der Geraden g mit dem Umkreis von $ABCD$, so dass $A' \neq A$ gilt. Sei weiter X ein beliebiger Punkt auf der Winkelhalbierenden von $\angle BAD$, der sich im Inneren des Dreiecks ΔABC befindet. Wir zeigen, dass $\angle A'BA = 90°$. Damit wäre AA' der Durchmesser und O läge auf der Geraden g.
Sei nun $\angle CAD = \alpha$ und $\angle XAC = \beta$. Da g die Spiegelung der Diagonalen AC ist, gilt $\angle A'AX$. Aus $\angle XAD = \angle XAC + \angle CAD = \alpha + \beta$ folgt auch $\angle BAX = \alpha + \beta$. Weiter erhält man

$$\angle BAA' = \angle BAX - \angle A'AX = (\alpha + \beta) - \beta = \alpha$$

und

$$\angle A'AC = \angle A'AX + \angle XAC = \beta + \beta = 2\beta$$

Da $ABA'D$ ein Sehnenviereck ist, gilt mit dem Peripheriewinkelsatz

$$\alpha + 2\beta = \angle CAD + \angle A'AC = \angle A'AD = \angle A'BD = \alpha + 2\beta$$

Nun gilt

$$\angle DBA = 180 - 90° - \angle BAC = 90° - \angle A'AC - \angle BAA' = 90° - \alpha - 2\beta$$

Damit folgt wie behauptet

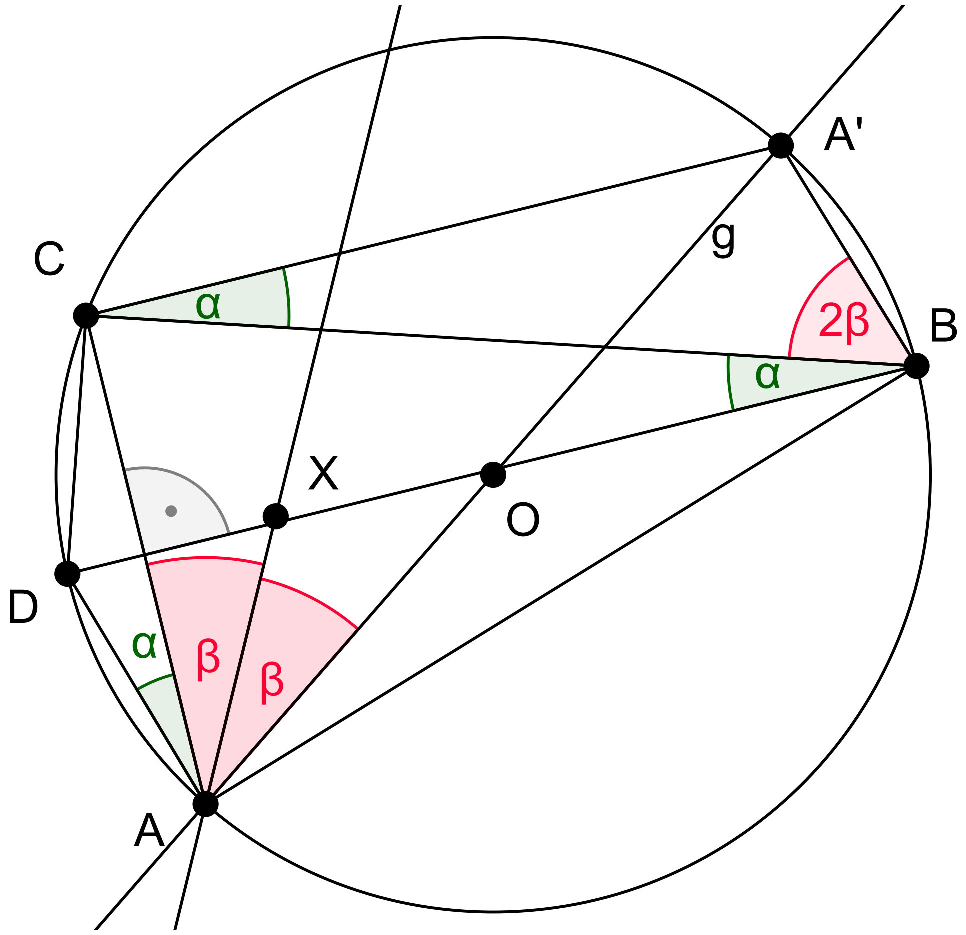
$$\angle A'BA = \angle A'BD + \angle DBA = \alpha + 2\beta + (90° - \alpha - 2\beta) = 90°$$

(analog hätte man $\angle A'DA = 90°$ zeigen können).

Zweite Lösung (Henning): Anstatt $\angle A'BA = 90°$ zeigen wir, dass $\angle ACA' = 90°$ gilt. Aus dem gleichen Argument folgt wie in der ersten Lösung, dass O auf g liegt. Sei wieder $\angle CAD = \alpha$ und $\angle CAX = \beta$. Wir folgern analog zur vorherigen Lösung, dass $\angle BAA' = \alpha$ gilt. Nun folgt mit dem Peripheriewinkelsatz über der Sehne $A'B$, dass $\alpha = \angle BAA' = \angle BCA' = \alpha$. Ähnlich ist mit dem Peripheriewinkelsatz über der Sehne CD

$$\alpha = \angle CAD = \angle CBD = \alpha$$

Da nun $\angle CBD = \angle BCA' = \alpha$ gilt, sind DB und CA' parallel. Weil AC senkrecht auf BD steht, steht somit AC auch senkrecht auf CA'. $\angle ACA'$ ist also wie behauptet 90°.



Marking Scheme - Erste Lösung:

- 2P: $\angle BAA' = \angle CAD$
- 1P: $\angle A'AD = \angle A'BD$
- 1P: $\angle DBA$ ausrechnen
- 1P: $\angle A'BA = 90°$
- 2P: $\angle ABA' = 90° \Leftrightarrow O$ liegt auf g

Anmerkung: Die Lösung funktioniert analog mit $ADA' = 90°$

Marking Scheme - Zweite Lösung:

- 2P: $\angle BAA' = \angle CAD$
- 1P: $\angle CBD$ oder $\angle A'CB$
- 1P: $A'C$ und BD sind parallel
- 1P: $\angle ACA' = 90°$
- 2P: $\angle ACA' = 90° \Leftrightarrow O$ liegt auf g

K1) Das SMO-Land hat 1111 Einwohner. Die elf Spieler der Liechtensteiner Nationalmannschaft verteilen Autogramme an alle Einwohner, wobei kein Einwohner ein Autogramm doppelt erhält (d.h. jeder Einwohner erhält von jedem Spieler entweder kein oder ein Autogramm).

(a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, welche Autogramme ein Einwohner erhalten kann?

(b) Nach dem Verteilen stellen die Einwohner fest, dass keine zwei von ihnen von genau denselben Spielern Autogramme erhalten haben. Zeige, dass es zwei Einwohner gibt, die zusammen von jedem Spieler genau ein Autogramm besitzen.

Lösung (Patrick):

Teilaufgabe a) Jeder Einwohner kann von jedem Spieler entweder ein Autogramm erhalten oder kein Autogramm erhalten. Somit gibt es insgesamt $2^{11} = 2048$ verschiedene Möglichkeiten Autogramme zu erhalten.

Teilaufgabe b) Nun geht es darum, diese 2048 Möglichkeiten auf die 1111 Einwohner zu verteilen, sodass jeder Einwohner eine andere Möglichkeit erhält. Es gilt nun zu zeigen, dass 2 von diesen 1111 Einwohner sich gegenseitig so ergänzen, dass sie zusammen jedes Autogramm genau einmal besitzen.
Da immer 2 Möglichkeiten sich gegenseitig ergänzen, kann man sich 1024 Schubfächer vorstellen, wobei jedes Schubfach eine Möglichkeit sowie die inverse Möglichkeit, also diejenige Möglichkeit, welche genau jedes andere Autogramm einmal enthält, repräsentiert. Da nun 1111 Möglichkeiten auf diese 1024 Schubfächer verteilt werden, enthält mindestens ein Schubfach 2 Möglichkeiten, somit gibt es auch 2 Einwohner, welche zusammen alle Autogramme einmal haben.

Marking Scheme

- 2P: Teilaufgabe a) (davon 1P: Begründung)
- 2P: Idee, dass jeweils 2 Möglichkeiten zusammen gehören
- 2P: Anwendung des Schubfachprinzips
- 1P: fertig machen

K2) Ein Hochhaus hat 7 Lifte, wobei aber jeder nur in 6 Stockwerken hält. Trotzdem gibt es für je zwei Stockwerke immer einen Lift, der die beiden Stockwerke direkt verbindet.

Zeige, dass das Hochhaus höchstens 14 Stockwerke haben kann, und dass ein solches Hochhaus mit 14 Stockwerken tatsächlich realisierbar ist.

Lösung (Louis): On construit d'abord un exemple d'une telle tour avec 14 étages comme suit:

étages

14			x		x	x	
13			x		x	x	
12			x	x			x
11			x	x			x
10		x			x		x
9		x			x		x
8		x		x		x	
7		x		x		x	
6	x					x	x
5	x					x	x
4	x			x	x		
3	x			x	x		
2	x	x	x				
1	x	x	x				
	1	2	3	4	5	6	7

ascenseurs

Où les $\times$ désignent les étages où s'arrêtent chaque ascenseur. On vérifie facilement que pour chaque paire d'étages il existe un ascenseur qui les relie directement.

Maintenant il faut prouver qu'une telle tour ne peut pas avoir plus de 14 étages.

Première Solution:

Nous utilisons pour cet exercice un outil appelé *calcul double*. L'idée est de compter de deux manière différentes le nombre de paires d'étage pour obtenir une condition sur le nombre d'étages.

D'une part, puisque chaque ascenseur dessert 6 étages, il y a $\binom{6}{2} = 15$ étages que cet ascenseur permet de relier directement. Ainsi, puisqu'il y a 7 ascenseurs dans la tour, il y a au maximum $7 \cdot \binom{6}{2} = 7 \cdot 15 = 105$ paires d'étages pour lesquelles il existe un ascenseur les reliant directement.

D'autre part, si la tour a n étages, alors il y a au total $\binom{n}{2}$ paires d'étages au total dans la tour. Ainsi, pour que la condition de l'exercice soit satisfaite, il faut que $\binom{n}{2} \leq 105$. Un rapide calcul montre que $\binom{15}{2} = 105$, donc la tour ne peut pas avoir plus de 15 étages.

À ce moment du raisonnement, il y a un piège. En effet l'exercice demande de prouver que la tour peut avoir au maximum 14 étages, or pour le moment on a prouvé que la tour ne pouvait pas avoir plus de 15 étages. L'exercice est-il faux? La bonne réponse serait-elle 15 et non pas 14? Bien sûr que non, et si on essaye de construire une telle tour avec 15 étages on se rend compte assez rapidement que ce n'est pas possible. Pourquoi donc?

La première chose à remarquer est que si la tour possède 15 étages, alors pour chaque paire d'étages il ne doit y avoir qu'un seul ascenseur qui les relie directement, autrement il existe une autre paire d'étages ne peut pas être reliée directement. Cependant, si on considère les ascenseurs qui s'arrêtent au dernier étage, ils doivent chacun s'arrêter à 5 autres étages, et il y a 14 autres étages à desservir. Ainsi, puisque 14 n'est pas divisible par 5, soit au maximum deux ascenseurs s'arrêtent au dernier étage et alors il n'est pas possible de relier tous les autres étages directement, soit trois ascenseurs ou plus s'y arrêtent et alors il existe un étage que l'on peut atteindre directement depuis le dernier étage avec au moins deux ascenseurs différents. Puisqu'on a une contradiction dans les deux cas on en déduit qu'il est impossible de construire une telle tour avec 15 étages et donc il peut y avoir au maximum 14 étages.

Deuxième solution: Dans cette solution, on regarde combien d'ascenseurs s'arrêtent à chaque étage. Pour un étage donné, chaque ascenseur qui s'arrêtent à cet étage s'arrêtent aussi à 5 autres étages, donc s'il y a au moins 14 étages il doit au moins y avoir 3 ascenseurs qui s'arrêtent à chaque étage.

Maintenant on compte combien d'arrêts les ascenseurs effectuent au total. D'une part il y a 7 ascenseurs qui font chacun 6 arrêts, donc il y a 42 arrêts au total, d'autre part puisque à chaque étage il y a au moins 3 ascenseurs qui s'y arrêtent, si n dénote le nombre total d'étages de la tour il y a au moins $3n$ arrêts. Il s'ensuit que $42 \geq 3n$, donc $n \leq 14$. Avec cette solution on remarque que pour construire une telle tour à 14 étages il faut qu'à chaque étage exactement 3 ascenseurs s'arrêtent, ce qui peut aider pour trouver la construction.

Marking Scheme

- Faire une construction claire et correcte avec 14 étages : 3 Pts. *Première solution*
- Nombre de paires d'étages ≤ 105 : 1 Pt.
- Déduire qu'il ne peut pas y avoir plus de 15 étages : + 1 Pt.
- Prouver qu'il ne peut pas y avoir 15 étages et conclure: + 2 Pts

  Deuxième solution
- Au moins 3 ascenseurs par étage : 1 Pt.
- Paires (ascenseur, étage) $= 42$: 1 Pt.
- Paires (ascenseur, étage) $\geq 3n$: 1 Pt.
- Conclure : 1 Pt.

Z1) Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Seien $d_1, \ldots, d_r$ alle verschiedenen positiven Teiler von n, die kleiner sind als n selbst. Bestimme alle n, für die gilt:

$$\mathrm{kgV}(d_1, \ldots, d_r) \neq n.$$

Bemerkung: Für $n = 18$ *hätte man beispielsweise* $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3, d_4 = 6, d_5 = 9$ *und somit* $\mathrm{kgV}(1, 2, 3, 6, 9) = 18$.

Lösung (Viviane): Falls n eine Primpotenz ist, gilt $n = p^\alpha$ für eine Primzahl p. Die Teiler von n kleiner als n sind dann $d_1 = 1, d_2 = p, \ldots, d_r = p^{\alpha-1}$. Somit gilt $kgV(1, p, \ldots, p^{\alpha-1}) = p^{\alpha-1} \neq n$.

Falls n keine Primpotenz ist, gilt $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ für ein $k \geq 2$. Dann besitzt n die beiden echten Teiler $p_1^{\alpha_1}$ und $p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$. Weiter gilt $kgV(d_1, \ldots, d_r) \geq kgV(p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}) = n$. Da alle d_i Teiler von n sind, gilt ebenfalls $kgV(d_1, \ldots, d_r) \,|\, n$ und somit muss gelten $kgV(d_1, \ldots, d_r) = n$.

Somit sind die gesuchten n genau die Primpotenzen.

Marking Scheme

- 2P: Beweis für Primpotenzen (davon 1P: klare Unterscheidung zwischen Primpotenzen und anderen Zahlen)
- 1P: $\mathrm{kgV}(d_1, \ldots, d_r) \,|\, n$
- 4P: $\mathrm{kgV}(d_1, \ldots, d_r) \geq n$, davon 2P: Betrachtung geeigneter Teiler von n
- -2P: Falscher Schluss $n \neq p^\alpha \Rightarrow n = p^\alpha q^\beta$

Z2) Seien m und n natürliche Zahlen und p eine Primzahl, sodass $m < n < p$ gilt. Weiter gelte:

$$p \mid m^2 + 1 \quad \text{und} \quad p \mid n^2 + 1.$$

Zeige, dass gilt:

$$p \mid mn - 1.$$

1. Lösung (David): Es gilt:

$$p \mid (n^2 + 1) - (m^2 + 1) \quad \Leftrightarrow \quad p \mid n^2 - m^2 \quad \Leftrightarrow \quad p \mid (n - m)(n + m)$$

Also ist wegen p prim sicher einer der Faktoren $(n - m)$ und $(n + m)$ durch p teilbar.
Wegen $0 < n - m < p - m < p$ gilt aber $p \nmid n - m$, also muss $p \mid n + m$ gelten. Dann folgt:

$$p \mid m(n + m) - (m^2 + 1) \quad \Leftrightarrow \quad p \mid mn - 1$$

2. Lösung (David): Wir multiplizieren die rechte Seite der ersten Teilbarkeitsbedingung mit n^2 und subtrahieren die rechte Seite der zweiten Bedingung:

$$p \mid n^2(m^2 + 1) - (n^2 + 1) \quad \Leftrightarrow \quad p \mid m^2n^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad p \mid (mn + 1)(mn - 1)$$

Wieder gilt, dass einer der beiden Faktoren rechts durch p teilbar sein muss. Wäre dies $mn + 1$, so würde gelten:

$$p \mid n^2 + 1 - (mn + 1) \quad \Leftrightarrow \quad p \mid n^2 - mn \quad \Leftrightarrow \quad p \mid n(n - m).$$

Da sich sowohl n als auch $n - m$ zwischen 0 und p befinden und daher teilerfremd zu p sind, ist dies ein Widerspruch. Also muss $p \mid mn - 1$ gelten.

Marking Scheme - Erste Lösung:

- 1P: $p \mid n^2 - m^2$
- 1P: $p \mid (n - m)$ oder $p \mid (n + m)$
- 2P: $p \mid n + m$
- 3P: fertig machen

Marking Scheme - Zweite Lösung:

- 2P: $p \mid n^2m^2 - 1$
- 1P: $p \mid mn + 1$ oder $p \mid mn - 1$
- 3P: $p \nmid mn + 1$
- 1P: fertig machen