

SMO-Selektion - Musterlösung

Zürich - 12./13./26./27. Mai 2018

1. Sei $k \geq 0$ eine ganze Zahl. Bestimme alle reellen Polynome P von Grad k mit k verschiedenen reellen Nullstellen, sodass für alle Nullstellen a von P gilt:

$$P(a + 1) = 1.$$

Antwort: Die Lösungen sind alle konstante Polynome $P(x) = c$ mit $c \neq 0$ und alle Polynome $P(x) = x + b$ mit $b \in \mathbb{R}$.

Lösung 1: Alle konstanten Polynome $P(x) = c \neq 0$ sind Lösungen. Sei P nun ein solches Polynom mit Grad mindestens 1. Das Polynom $Q(x) = P(x+1) - P(x) - 1$ hat nach Voraussetzung mindestens n verschiedene Nullstellen. Da Q aber maximal Grad $n - 1$ hat, folgt dass $Q(x) = 0$ bzw. $P(x+1) = P(x) + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Daraus folgt, dass P Grad 1 hat, denn falls dem nicht so wäre, so würde ein Koeffizientenvergleich von x^{n-1} zu $a_{n-1} + na_n = a_{n-1}$ führen (wobei $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$) und somit $a_n = 0$ implizieren, was natürlich nicht sein kann. Also hat P Grad 1 und wir können $P(x) = ax + b$ schreiben. Sei y seine Nullstelle. Nach Annahme gilt

$$1 = P(y + 1) = a(y + 1) + b = ay + b + a = P(y) + a = a.$$

Also muss $a = 1$ gelten. Für jede $b \in \mathbb{R}$ ist das Polynom $P(x) = x + b$ eine Lösung.

Lösung 2: Sei $P(x) = c_k x^k + c_{k-1} x^{k-1} + \dots + c_0$. Wir wollen zuerst per Widerspruch zeigen, dass $k < 2$. (Wir bezeichnen die Nullstellen mit $a_1 < \dots < a_k$.)

Da $P(x)$ Grad k hat, hat $P(x)$ auch höchstens k einstellungen (weil $P(x) - 1$ auch höchstens k nullstellen hat). Da $P(a_i + 1) = 1$ für alle nullstellen von P , müssen dies auch genau die einstellungen von P sein.

Nehmen wir zuerst an, $k > 1$ sei gerade. Dann muss der führende Koeffizient c_k positiv oder negativ sein. Aber falls $c_k < 0$ folgt dass $P(x)$ geht gegen $-\infty$ für x gegen ∞ , und dann muss $P(x) < 0$ für alle $x > a_k$. Ein Widerspruch zu $P(a_k + 1) = 1$.

Falls $c_k > 0$ geht $P(x)$ gegen ∞ für x gegen $-\infty$, und dann muss $P(x) = 1$ für ein $x < a_1$. Dies ist aber ein widerspruch zu $P(x)$ hat die einstellungen genau bei $P(a_i + 1)$.

Wenn nun k ungerade, dann kann man $P'(x) = P(x - a_1)$ nehmen. P' sollte nun immernoch die Aufgabenstellung erfüllen und die kleinste Nullstelle ist 0. Faktorieren wir $P'(x) = x \cdot Q(x)$. Nun gilt für $Q(x)$ wieder, hat Grad $k - 1$, hat $k - 1$ verschieden nullstellen und $Q(a_i + 1) > 0$. Dann, da Q geraden Grad hat folgt mit der gleichen Fallunterscheidung wie oben ein Widerspruch.

Für den Grad < 2 lassen sich schnell die Lösungen finden.

Solution 3: Si $k \geq 2$, soient $a_1 < \dots < a_k$ les zéros de P . On écrit $P(x) = c(x - a_1) \cdots (x - a_k)$. On sait que $P(a_k + 1) = P(a_{k-1} + 1)$. Donc

$$\begin{aligned} (a_k - a_1 + 1) \cdots (a_k - a_{k-2} + 1)(a_k - a_{k-1} + 1) &= \\ (a_{k-1} - a_1 + 1) \cdots (a_{k-1} - a_{k-2} + 1)(a_{k-1} - a_k + 1). & \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}(a_k - a_1 + 1) &> (a_{k-1} - a_1 + 1), \\ &\dots, \\ (a_k - a_{k-2} + 1) &> (a_{k-1} - a_{k-2} + 1), \\ (a_k - a_{k-1} + 1) &> (a_{k-1} - a_k + 1).\end{aligned}$$

C'est une contradiction, donc $k \leq 1$. On traite les cas $k = 0, 1$ comme dans la première solution

Solution 4: Si $\deg(P) \geq 2$, soit $Q(x) := P(x) - 1$ et $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0$ avec zéros x_1, \dots, x_k . Par les formules de Viète sur P et sur Q , on a

$$x_1 + \dots + x_k = -\frac{a_{k-1}}{a_k} = (x_1 + 1) + \dots + (x_k + 1)$$

et donc $k = 0$. Contradiction. On traite les cas $k = 0, 1$ comme dans la première solution.

Marking scheme: *Prouver que $k \leq 2$:* 5P. *Trouver les solutions avec $k \leq 1$:* +2P.

Pour la première étape, des points partiels peuvent être attribués de la manière suivante. Si plusieurs solutions ont été essayées, seule celle donnant le plus grand nombre de points est considérée:

Solution 1:

- introduire Q : 1P
- $\deg(Q) \leq n - 1$ ou Q a n racines: +1P
- en déduire $Q \equiv 0$ et $P(x + 1) = P(x) + 1$: +2P

Solution 2:

- Beobachtung $P(x)$ hat genau k einstellen: 1P
- Zeigen, dass k nicht gerade sein kann: +2P
- Faktorizierung von P in ein Polynom mit Grad um eins kleiner: +1P

Solution 3:

- nommer les racines et factoriser $P(x) = c(x - a_1) \cdots (x - a_k)$: 0P
- évaluer la factorisation en une racine $(a_i - a_1 + 1) \cdots (a_i - a_k + 1) = 1$: 1P
- évaluer la factorisation en une **deuxième** racine $(a_i - a_1 + 1) \cdots (a_i - a_k + 1) = (a_j - a_1 + 1) \cdots (a_j - a_k + 1)$: 1P

Solution 4:

- Viète sur P : $x_1 + \dots + x_k = -\frac{a_{k-1}}{a_k}$: 2P
- Viète sur Q : $(x_1 + 1) + \dots + (x_k + 1) = -\frac{a_{k-1}}{a_k}$: +1P

Pour les solutions incomplètes, on ne retire pas de point pour avoir oublié d'exclure $\deg(P) = 0$ dans un argument. Dans toutes les solutions complètes, les points suivants sont retirés:

- les solutions constantes sont absentes: -1P
- on ne mentionne pas que les solutions $P(x) = x + c$ sont vraiment solutions: -1P

2. Soit ABC un triangle aigu et O le centre de son cercle circonscrit. La droite OA coupe la hauteur h_b en P et la hauteur h_c en Q . Soit H l'orthocentre du triangle ABC . Prouver que le centre du cercle circonscrit au triangle PQH est sur la médiane du triangle ABC passant par A .

Remarque: La hauteur h_a est la droite perpendiculaire à BC passant par A .

Solution: On commence par une petite chasse aux angles. Soient α, β et γ les trois angles du triangle ΔABC . Observez que $\angle HPQ = \pi/2 - \angle PAC$ parce que PH est perpendiculaire à AC . De plus, comme OA est un diamètre du cercle circonscrit à ΔABC on a $\beta = \pi/2 - \angle OAC = \pi/2 - \angle PAC$. Ainsi $\angle HPQ = \beta$ et de manière similaire $\angle PQH = \gamma$. On en déduit que $\Delta ABC \sim \Delta HPQ$. Par chasse aux angles, on obtient aussi que $\angle AHP = \gamma$ et donc AH est la tangente au cercle circonscrit de ΔPQH en H .

L'idée est à présent d'introduire la tangente au cercle circonscrit à ABC en A par similarité avec le triangle ΔPQH . Soit t cette tangente et S son intersection avec la droite BC . Si O' est le centre du cercle circonscrit de ΔPQH , alors la similarité de la construction implique que $\Delta AO'Q \sim \Delta SOC$.

Soit M l'intersection de AO' avec le côté BC . Comme $\angle O'AQ = \angle OSC$, on en déduit que $AOMS$ est un quadrilatère inscrit. Donc $\angle SMO = \pi - \angle SAO = \pi/2$. On conclut que OM est perpendiculaire à BC et donc M est le milieu de BC .

Marking scheme:

(a) chasse aux angles: total 2P

- explicitement obtenir $\Delta ABC \sim \Delta HPQ$: 1P
- $\angle PHA = \gamma$ et déduire que AH est tangente: 1P

(b) arguments par similarité: total 3P

- un argument par similarité (eg. introduire t , introduire HO' et calculer des angles): 1P
- conclure $\Delta AO'Q \sim \Delta SOC$ ou similaire: 2P

(c) conclusion: 2P

Éléments ne valant aucun point:

- reformuler la conclusion de manière triviale (eg. $OM \perp BC$)
- introduire la hauteur h_a
- chasse aux angles sur un dessin

3. Entlang der Küste einer kreisrunden Insel befinden sich 20 verschiedene Dörfer. Jedes dieser Dörfer hat 20 Kämpfer, wobei alle 400 Kämpfer unterschiedlich stark sind.

Jeweils zwei benachbarte Dörfer A und B machen nun einen Wettkampf, indem sich jeder der 20 Kämpfer des Dorfs A mit jedem der 20 Kämpfer des Dorfs B misst. Dabei gewinnt jeweils der stärkere Kämpfer. Wir sagen, dass das Dorf A *stärker* ist als das Dorf B , falls in mindestens k der 400 Kämpfe ein Kämpfer von Dorf A gewinnt.

Es stellt sich heraus, dass jedes Dorf stärker als sein Nachbardorf im Uhrzeigersinn ist. Bestimme den maximalen Wert von k , sodass dies der Fall sein kann.

Antwort: Der maximale Wert ist $k = 290$.

Lösung:

Wir geben zuerst eine Konstruktion und beweisen dann, dass mehr als 290 nicht möglich ist. O.B.d.A können wir annehmen, dass die Kämpfer Stärken 1 bis 400 haben, und wir nummerieren die Dörfer im Uhrzeigersinn von eins bis zwanzig.

Konstruktion: Im ersten Dorf leben die Kämpfer der Stärke 400, 190, 189, 188, \dots , 174, 173, 172. Im zweiten Dorf leben 399, 398, 171, 170, \dots , 157, 156, und so weiter, im letzten Dorf leben die Kämpfer 210, 209, \dots , 192, 191. Anschaulicher gesagt verteilen wir zuerst die Kämpfer mit Stärke grösser als 190 auf die Dörfer auf, ins erste Dorf 400, ins zweite Dorf 399, 398, ins dritte Dorf 397, 396, 395, usw. Dann füllen wir die Dörfer mit Kämpfer mit Stärke maximal 190 auf, ins erste Dorf 190, \dots , 172, ins zweite Dorf 171, \dots , 156, usw.

Bemerke, dass Dorf x gerade x Kämpfer der Stärke grösser als 190 hat und $20 - x$ Kämpfer der Stärke kleiner als 191. Für $x \in \{1, \dots, 19\}$ gewinnen die Kämpfer mit Stärke grösser als 190 gegen alle Kämpfer des Dorfs $x + 1$. Die Kämpfer der Stärke kleiner als 191 gewinnen gegen die Kämpfer der Stärke kleiner als 191 im nächsten Dorf, also gewinnen sie je $(20 - (x + 1))$ Mal. Insgesamt gewinnt Dorf x also $20x + (20 - x)(20 - (x + 1))$ Mal. Ausrechnen ergibt, dass jedes dieser Dörfer mindestens 290 Mal gewinnt. Nun betrachten wir noch das zwanzigste Dorf. Seine Kämpfer gewinnen gegen neunzehn Kämpfer vom Dorf eins, also gewinnt das zwanzigste Dorf mehr als 290 Mal. Somit ist $k = 290$ möglich.

Obere Schranke: Nehme an, dass $k > 290$ geht. Wir nennen Kämpfer mit Stärke maximal 200 *schwach*. Es gibt 200 schwache Kämpfer und zwanzig Dörfer, also gibt es per Schubfachprinzip mindestens ein Dorf, das mindestens 10 schwache Kämpfer hat. Wir zählen, wie viel Mal dieses Dorf gewinnen kann. Die restlichen Kämpfer des Dorfs gewinnen insgesamt maximal $10 \cdot 20 = 200$ Mal. Somit müssen die 10 schwachen Kämpfer mindestens 91 Mal gewinnen. Es folgt wiederum mit Schubfachprinzip, dass mindestens einer der 10 schwachen Kämpfer 10 Mal gewinnen muss. Folglich hat auch das nachfolgende Dorf mindestens 10 schwache Kämpfer. Mit dem gleichen Argument folgern wir reihum, dass jedes Dorf mindestens 10 schwache Kämpfer hat. Weiter folgt aus dem Argument, dass der stärkste der schwachen Kämpfer jeweils stärker sein muss als der stärkste der schwachen Kämpfer vom nachfolgenden Dorf, da er sonst nicht 10 Mal gewinnen kann. Daraus folgt aber auch, da wir das Argument reihum anwenden können, dass der stärkste der schwachen Kämpfer im ersten Dorf stärker sein muss als er selbst, was nicht möglich ist. Widerspruch, folglich ist $k \leq 290$.

Marking Scheme:

- 3P Konstruktion, -1 falls 290 nicht richtig ausgerechnet
- 1P 10 schwache Kämpfer in einem Dorf, 11- oder 10-stärksten Kämpfer betrachten

- 1P 10 schwache Kämpfer im nächsten Dorf mit Stärkenungleichung, 11- oder 10- stärkster Kämpfer im nächsten Dorf ist schwächer

4. Soit n un nombre naturel pair. On partitionne les nombres $1, 2, \dots, n^2$ en deux ensembles A et B de taille égale, de telle manière que chacun des n^2 nombres appartient à exactement un des deux ensembles. Soient S_A et S_B la somme de tous les éléments dans A et B respectivement. Déterminer tous les n pour lesquels il existe une partition telle que

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{39}{64}.$$

Réponse: Les nombres naturels n recherchés sont tous les multiples de 206.

Solution: Soit k le nombre entier tel que $S_A = 39k$ et $S_B = 64k$. On a alors que la somme de tous les nombres de 1 à n^2 vaut

$$\frac{n^2(n^2 + 1)}{2} = S_A + S_B = 39k + 64k = 103k.$$

Ainsi, $103 \mid \frac{n^2(n^2+1)}{2}$, et comme 103 est un nombre premier il doit diviser soit $\frac{n^2}{2}$, soit $n^2 + 1$. Cependant, puisque n^2 et $1 = 1^2$ sont premiers entre eux, tous les diviseurs premiers de $n^2 + 1$ doivent être congruents à 1 mod 4. Puisque $103 \equiv 3 \pmod{4}$, il ne peut donc pas diviser $n^2 + 1$ et ainsi il doit être un diviseur de $\frac{n^2}{2}$. Cela ne peut être le cas que si $103 \mid n$, donc puisque n doit être pair il ne peut y avoir de solution que si n est un multiple de 206.

Montrons maintenant que, si $n = 206m$ pour un certain nombre naturel m , il existe une telle partition. Dans ce cas on a

$$k = \frac{S_A + S_B}{103} = \frac{n^2(n^2 + 1)}{206}$$

et il suffit de montrer que l'on peut choisir la moitié des nombres de sorte à ce que leur somme vaille $39k$. En effet, dans ce cas la somme des nombres restants vaudra nécessairement $64k$. Nous prouvons ici une propriété plus forte, à savoir que *toutes* les sommes de $\frac{n^2(n^2+2)}{8}$ à $\frac{3n^4+2n^2}{8}$ sont atteignables. Puisque $\frac{n^2(n^2+2)}{8} = \frac{103k}{4} < 26k < 39k < \frac{103k}{2}$, cela termine la preuve. Les deux sommes extrêmes peuvent être obtenues en prenant respectivement tous les nombres de 1 à $\frac{n^2}{2}$ et tous les nombres de $\frac{n^2}{2} + 1$ à n^2 . Maintenant si nous prenons une partition avec $S_A > \frac{n^2(n^2+2)}{8}$, l'ensemble A doit contenir un nombre plus grand que $\frac{n^2}{2}$ et donc B doit contenir un nombre plus petit ou égal à $\frac{n^2}{2}$. En particulier cela signifie qu'il existe un nombre dans A qui est strictement plus grand qu'un nombre dans B . Il existe donc un nombre x tel que $x \in B$ et $x + 1 \in A$. En échangeant x et $x + 1$, la somme dans A diminue donc de 1, ce qui prouve qu'il est effectivement possible d'atteindre toutes les sommes.

Solution 2 (Yunshu): On prouve comme dans la première solution que n doit être un multiple de 206. Pour la construction, on va prouver par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}$ il est possible de trouver un sous-ensemble A de l'ensemble $\{1, 2, \dots, 206m\}$ contenant $103m$ éléments et tel que la somme des éléments de A vaille

$$\frac{39}{103} \frac{206m(206m + 1)}{2} = 39m(206m + 1).$$

L'ensemble B est alors le complémentaire de A et par construction on aura $\frac{S_A}{S_B} = \frac{39}{64}$. On va de plus prouver que le plus grand nombre dans A ne dépasse pas $39 * 4m = 156m$

On commence avec $m = 0$ et A l'ensemble vide. Dans ce cas S_A vaut trivialement $\frac{39}{103}$ fois la somme de tous les éléments entre 1 et $206m$. Évidemment on ne peut pas calculer $\frac{S_A}{S_B}$ dans ce cas mais cela permet d'avoir un cas de base pour l'induction. Maintenant supposons que l'on ait construit un ensemble A pour m avec toutes les propriétés susmentionnées et construisons A'

pour $m + 1$. On rajoute les nombres $1 + 206m, \dots, 206 + 206m$, donc la somme totale augmente de

$$\frac{206 * 207}{2} + 206 * 206m = 103(207 + 103 * 4m)$$

donc il faut rajouter 103 nombres à A dont la somme vaut

$$39(207 + 103 * 4m) = 102 * 39(4m + 2) + 39(4m + 3).$$

Pour cela on rajoute à A les 51 paires $(39(4m + 2) - i, 39(4m + 2) + i)$ avec $1 \leq i \leq 52$ et $i \neq 39$ ainsi que le nombre $39(4m + 2) + 39 = 39(4m + 3)$. Par construction ces 103 nombres donnent la somme voulue et comme $2 * 39 = 78 > 52$, le plus petit nombre rajouté est plus grand que $39 * 4m$ et le plus grand nombre rajouté est plus petit que $39(4m + 4) = 39 * 4(m + 1)$. Cela prouve que aucun des nombres rajoutés n'appartenait déjà à A et que la condition sur le plus grand nombre de A reste vérifiée. Finalement puisque nous avons commencé avec un ensemble A qui était solution pour m , par construction le nouvel ensemble A' est solution pour $m + 1$.

Marking scheme:

Il n'existe pas de solution si $103 \nmid n$: Total 4 Pt.

- $103 \mid \frac{n^2(n^2+1)}{2}$: 1 Pt.
- $103 \nmid n^2 + 1$: +2 Pt.
 - Idée de preuve pour $103 \nmid n^2 + 1$ (p. ex. ordres ou résidus quadratiques): 1 Pt.
- Il est nécessaire que $103 \mid n$: +1 Pt.

Il existe une solution si $103 \mid n$: Total 3 Pt.

- S_A peut prendre n'importe quelle valeur entre $\frac{n^2(n^2+2)}{8}$ et $\frac{3n^4+2n^2}{8}$: 2 Pt.
- $\frac{n^2(n^2+2)}{8} < 39k < \frac{3n^4+2n^2}{8}$: +1 Pt.

5. Für eine natürliche Zahl n sei ein $n \times n$ Brett gegeben. Wir färben nun k der Felder schwarz ein, sodass es für jeweils drei Spalten maximal eine Reihe gibt, in der alle Kreuzungsfelder mit den drei Spalten schwarz gefärbt sind. Zeige, dass gilt:

$$\frac{2k}{n} \leq \sqrt{8n-7} + 1.$$

Lösung:

Wir zählen für jedes Paar von Reihen die Anzahl Spalten, sodass beide Reihen in dieser Spalte schwarz sind. Offensichtlich sind das höchstens 2 für jede der $\binom{n}{2}$ Kombinationen, also insgesamt maximal $n(n-1)$. Wenn es in der i -ten Spalte also a_i schwarze Quadrate sind, zählen wir jedes dieser Quadrate mindestens $\binom{a_i}{2}$ mal. Wenn man nun über alle Spalten summiert, erhält man :

$$\sum_{i=1}^n \binom{a_i}{2} \leq n(n-1) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 - a_i}{2} \leq n(n-1) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i^2 - a_i \leq 2n(n-1).$$

Nun gilt $\sum_{i=1}^n a_i = k$ und mit CS, Chebychef oder ähnlichem: $\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{n} = \frac{k^2}{n}$, also gilt $\frac{k^2}{n} - k \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 - a_i \leq 2n(n-1) \Rightarrow k^2 - nk - 2n^2(n-1) \leq 0$.

Auf der LS steht ein quadratisches Polynom in k mit positivem Leitkoeffizient, insbesondere muss also k kleiner oder gleich der grösseren Nullstelle dieses Polynoms sein, dh:

$$k \leq \frac{n + \sqrt{n^2 + 8n^2(n-1)}}{2} \Leftrightarrow \frac{2k}{n} \leq \sqrt{8n-7} + 1$$

Marking scheme:

- 2P : Die Formel $2 * \binom{n}{2}$ finden.
- 3P : Die Formel $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 - a_i}{2}$ finden.
- 2P : Den Beweis vollenden.

6. Seien A, B, C und D vier Punkte, die in dieser Reihenfolge auf einem Kreis liegen. Nehme an, es gibt einen Punkt K auf der Strecke AB , sodass BD die Strecke KC und AC die Strecke KD halbiert. Bestimme den kleinstmöglichen Wert, den $\left|\frac{AB}{CD}\right|$ annehmen kann.

Réponse: Le minimum est 2.

Solution: *On n'utilise que des distances non-orientées (i.e. positives).*

On obtient une construction si $ABCD$ est un trapèze isocèle avec base $AB = 2CD$ et K le milieu de AB .

La condition sur les milieux implique que $[ADC] = [AKC]$ où la notation crochets signifie l'aire du triangle. Si l'on pose $\alpha := \angle CAD = \angle DBC$ et $\beta := \angle BAC = \angle BDC$, on obtient

$$\begin{aligned} [ADC] &= \frac{1}{2} \sin(\alpha) \cdot AC \cdot AD \\ [AKC] &= \frac{1}{2} \sin(\beta) \cdot AC \cdot AK. \end{aligned}$$

Donc $AK/AD = \sin(\alpha)/\sin(\beta)$. Si on applique le théorème du sinus au triangle $\triangle BCD$, on obtient

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{CD}{BC}$$

et donc $AK/CD = AD/BC$. Par symétrie, $BK/CD = BC/AD$. Finalement, avec AMGM:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AK}{CD} + \frac{BK}{CD} = \frac{AD}{BC} + \frac{BC}{AD} \geq 2.$$

Solution (sans sinus): On introduit la projection orthogonale H de C sur AD et la projection orthogonale H' de C sur AB . On a

$$\begin{aligned} [ADC] &= AD \cdot CH \\ [AKC] &= AK \cdot CH'. \end{aligned}$$

De plus, $\triangle CHD \sim \triangle CH'B$ et donc $CH/CD = CH'/CB$. On obtient ainsi de même, $AK/CD = AD/BC$.

Marking scheme:

- $\left|\frac{AB}{CD}\right| \leq 2$ (construction): 2P
- $\left|\frac{AB}{CD}\right| \geq 2$: 5P.

Les points partiels suivants ne sont pas additifs:

- transformer la condition sur les milieux en une condition sur les aires: 2P
- écrire AK comme un ratio utile de distances ou d'angles
- $AK/CD = AD/BC$ ou similaire: 4P

7. Sei n eine natürliche Zahl. Wir nennen eine Sequenz bestehend aus $3n$ Buchstaben *rumänisch*, falls die Buchstaben I , M und O alle genau n Mal vorkommen. Ein *swap* ist eine Vertauschung von zwei benachbarten Buchstaben. Zeige, dass für jede rumänische Sequenz X eine rumänische Sequenz Y existiert, sodass mindestens $\frac{3n^2}{2}$ swaps nötig sind, um die Sequenz Y aus der Sequenz X zu erhalten.

Lösung:

Wir nummerieren die Positionen der Buchstaben von 1 bis $3n$ und berechnen für jede Sorte von Buchstaben $\{I, M, O\}$ die Differenz zwischen der Summe ihrer Positionen und der Summe der Positionen $1, \dots, n$:

$$S_I := \sum_{j=1}^n p_j(I) - \sum_{j=1}^n j$$

$$S_M := \sum_{j=1}^n p_j(M) - \sum_{j=1}^n j$$

$$S_O := \sum_{j=1}^n p_j(O) - \sum_{j=1}^n j$$

wobei $p_j(I)$ die Position des j -ten Buchstabens I in der Sequenz bezeichnet. Summieren wir die drei Gleichungen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} S_I + S_M + S_O &= \sum_{j=1}^n p_j(I) + p_j(M) + p_j(O) - 3\left(\sum_{j=1}^n j\right) = \sum_{j=1}^{3n} j - 3\left(\sum_{j=1}^n j\right) \\ &= \frac{3n(3n+1)}{2} - 3\frac{n(n+1)}{2} = \frac{9n^2 + 3n - 3n^2 - 3n}{2} = 3n^2 \end{aligned}$$

Also können nicht alle der Summen S_I, S_M, S_O kleiner als n^2 sein. Sei am Anfang oBdA $S_I \geq n^2$. Da sich S_I bei einem Swap höchstens um eins verringern kann, benötigen wir sicher mindestens n^2 Swaps, um alle I nach ganz links zu bringen. Zudem gilt: Vertauschen wir ein I mit einem benachbarten Buchstaben, ändert sich die relative Anordnung der M und O nicht, also können wir ein ähnliches Argument mit M und O durchführen:

Um die Lösung etwas abwechslungsreicher zu gestalten, zählen wir dieses Mal die Anzahl verschiedener Paare aus jeweils einem M und O . Offensichtlich sind dies genau n^2 . Unterscheiden wir nun die Anzahl Paare P_1 , in denen M links von O steht und die Anzahl Paare P_2 , in denen M rechts von O steht, folgt, dass es von einer Sorte mindestens $\frac{n^2}{2}$ geben muss. Sei am Anfang oBdA $P_2 \geq \frac{n^2}{2}$. Auch diese Grösse ändert sich pro Swap höchstens um 1 (und zwar genau dann, wenn wir ein M mit einem O vertauschen, also müssen wir, um alle O nach ganz rechts zu bringen, noch mindestens $\frac{n^2}{2}$ Swaps durchführen.

Insgesamt gilt also: Um die Sequenz $I, \dots, I, M, \dots, M, O, \dots, O$ zu erhalten, benötigt man mindestens $n^2 + \frac{n^2}{2} = \frac{3n^2}{2}$ Swaps. Diese dürfen wir zusammenzählen, weil die Swaps, die S_I verringern, P_2 unverändert lassen und umgekehrt.

Solution 2:

On considère les deux suites $A = I \dots IM \dots MO \dots O$ et $B = O \dots OM \dots MI \dots I$. Pour passer d'une suite à l'autre, chaque paire de lettres différentes ((I, M) , (I, O) et (M, O)) doit être permutée au moins une fois. Puisqu'il existe $3n^2$ telles paires, il faut donc au minimum $3n^2$ swaps pour passer de la première suite à la seconde. Si l'on prend maintenant n'importe quelle suite

X , on peut choisir Y qui est soit A , soit B . En effet si ces deux suites pouvaient être obtenues depuis X en strictement moins de $\frac{3n^2}{2}$ swaps, alors en passant par X il serait possible d'aller de A à B en strictement moins de $3n^2$ swaps.

Marking Scheme

Lösung 1:

- +1P: Idee, die Buchstaben zu sortieren
- +3P: Berechnung der Anzahl Swaps für eine Sorte Buchstaben
- +2P: Berechnung für die zweite Sorte
- +1P: fertig machen
- -1P: Fehlende Argumentation, dass die verschiedenen Arten von Swaps disjunkt sind.

Solution 2:

- 2P: Considérer les deux suites A , B et la distance entre les deux.
- +3P: Prouver que la distance entre A et B vaut $3n^2$.
- 2P: Prouver l'exercice sous la supposition qu'il existe deux suites dont la distance vaut au minimum $3n^2$.

8. Déterminer tous les nombres naturels $n \geq 2$ tels que pour tous les nombres entiers $0 \leq i, j \leq n$:

$$i + j \equiv \binom{n}{i} + \binom{n}{j} \pmod{2}.$$

Réponse: Les solutions sont tous les nombres de la forme $n = 2^k - 2$ avec $k \geq 2$.

Solution:

En posant $j = i + 1$ (pour $i < n$), on obtient

$$\binom{n+1}{i+1} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} \equiv i + i + 1 \equiv 1 \pmod{2}.$$

Ainsi, puisque $\binom{n+1}{0} = 1$, cela signifie que pour tout $0 \leq i \leq n+1$ le nombre $\binom{n+1}{i}$ doit être impair. Pour tout $0 \leq i \leq n+1$ on peut écrire

$$\binom{n+1}{i} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n+2-i)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot i},$$

donc puisque pour passer de $i-1$ à i on multiplie par $q = \frac{n+2-i}{i}$ et que $\binom{n+1}{i-1}$ et $\binom{n+1}{i}$ sont tous les deux impairs, cela signifie que la fraction irréductible associée à q doit être un quotient de deux nombres impairs. Autrement dit, il faut que pour tout $1 \leq i \leq n+1$ les deux nombres $n+2-i$ et i admettent le même nombre de facteurs 2 dans leur décomposition en nombre premier.

On veut montrer que $n+2$ est une puissance de 2. Soit 2^l la plus grande puissance de 2 qui soit strictement inférieure à $n+2$. En particulier on a $2^l \geq \frac{n+2}{2}$. Considérons donc $i = 2^l$. Il faut alors que 2^l divise $n+2-2^l$, et comme $n+2-2^l \leq 2^l$, ce n'est le cas que si $n+2 = 2^{l+1}$.

Il reste à prouver que tous les nombres de la forme $n = 2^k - 2$ sont effectivement solution. Pour cela il suffit en fait de prouver que $\binom{n}{i} \equiv i + 1 \pmod{2}$ pour tout $0 \leq i \leq n$. En effet si c'est le cas on a alors

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{j} \equiv i + j + 2 \equiv i + j \pmod{2}.$$

On va montrer cette propriété par induction sur i . Pour $i = 0$ et $i = 1$ on a clairement $\binom{n}{i} \equiv i + 1 \pmod{2}$. Supposons maintenant que la propriété a déjà été prouvée jusqu'à $i - 1$. Si i est impair, on multiplie le nombre précédent par $\frac{n+1-i}{i}$, et comme le numérateur est pair alors que le dénominateur est impair on a effectivement que $\binom{n}{i}$ est pair. Si i est pair on multiplie $\binom{n}{i-2}$ par $\frac{n+1-i}{i-1} \cdot \frac{n+2-i}{i}$. La première fraction est un quotient de deux nombres impairs, et comme $n+2 = 2^k$ la deuxième fraction peut également s'écrire comme un quotient de deux nombres impairs, donc puisque $\binom{n}{i-2}$ est impair, $\binom{n}{i}$ est également impair.

Autre solution: Man schaut das Sierpinski-Dreieck an und bemerkt mit Gleichungen wie oben, dass man eine Reihe der Form $(1, 0, 1, 0, 1, \dots, 1, 0, 1)$ braucht. Man kann zeigen, dass solche Reihen genau bei $2^n - 2$ vorkommen.

Marking Scheme:

n doit être de la forme $2^k - 2$: 5P.

- Obtenir une condition de parité sur un coefficient binomial: 2P.
- Conclure que $n + 2 = 2^k$: 3P.

Tous les nombres de la forme $n = 2^k - 2$ sont solution: 2P.

- Réduire à un test de parité sur un coefficient binomial: 0P. (1P. sans *n* doit être de la forme $2^k - 2$)
- Conclure: 2P.

Autre solution:

- Sierpinski-Dreieck betrachten: 1P.
- Man sucht eine Reihe $(1, 0, 1, 0, 1, \dots, 1, 0, 1)$: 3P.
- Diese Reihen sind genau bei 2^{-2} : 3P. (1P. falls Beweis ungenügend.)

9. Seien a, b, c, d reelle Zahlen. Beweise:

$$(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1)(d^2 - d + 1) \geq \frac{9}{16}(a - b)(b - c)(c - d)(d - a).$$

Lösung: Beachte, dass $a^2 - a + 1 = (\frac{a}{2} - 1)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2 > 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt. Mit Cauchy-Schwarz und dann der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \sqrt{(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)} &= \sqrt{\left(\left(\frac{a}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2\right) \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 1\right)^2\right)} \\ &\geq \left|\left(\frac{a}{2} - 1\right)\frac{\sqrt{3}}{2}b\right| + \left|\left(\frac{b}{2} - 1\right)\frac{\sqrt{3}}{2}a\right| \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\left|\frac{a}{2} - 1\right|b + \left|1 - \frac{b}{2}\right|a\right) \\ &\geq \frac{\sqrt{3}}{2}|a - b|. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation dieser Ungleichung mit den drei analogen Abschätzungen ergibt sich die Behauptung.

Marking Scheme:

- +2 $a^2 - a + 1$ als Summe von Quadraten schreiben
- +2 Cauchy-Schwarz
- +2 Rest der Abschätzung (zB Dreiecksungleichung)
- +1 Fertig

10. Sei ABC ein Dreieck, M der Mittelpunkt der Strecke BC und D ein Punkt auf der Geraden AB , sodass B zwischen A und D liegt. Sei E ein Punkt auf der anderen Seite der Geraden CD als B , sodass $\angle EDC = \angle ACB$ und $\angle DCE = \angle BAC$. Sei F der Schnittpunkt von CE mit der Parallelen zu DE durch A und sei Z der Schnittpunkt von AE und DF . Zeige, dass sich die Geraden AC , BF und MZ in einem Punkt schneiden.

Lösung: Sei $\alpha = \angle DCE = \angle BAC$ und $\gamma = \angle CDE = \angle ACB$. Zuerst findet man durch Winkeljagd, dass $\angle DBC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \gamma - \alpha = 180^\circ - \angle DEC$; Somit ist $DBCE$ ein Sehnenviereck. Da Af parallel zu DE ist, gilt: $\angle DFC = 180^\circ - \angle CED = \angle DBC = 180^\circ - \angle ABC$. Somit ist $ABCF$ auch ein Sehnenviereck. Sei X der Schnittpunkt von AC mit BF und Y der Schnittpunkt von BE mit DC . Wir beweisen nun, dass sowohl M als auch Z auf XY liegen. Um zu beweisen, dass Z auf XY liegt, verwendet man Pappus mit den Punkten $ACDFBE$. Des weiteren findet man mit Winkeljagd: $\angle BFC = \angle BAC = \angle DCF = \angle DBE$. Somit ist DC parallel zu BF und AC parallel zu BE . Das heisst, $BYCX$ ist ein Parallelogramm und in einem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen gegenseitig. Somit liegt M auch auf XY .

Marking Scheme:

Additiv Teilpunkte:

- Beweisen, dass M auf XY liegt: 4P, mit Teilpunkten
 - Die Sehnenvierecke $FCAB$ und $BCED$ finden : 1P
 - Beweisen, dass $FB \parallel CD$ oder $BE \parallel AC$: 1P
- Pappus verwenden um zu zeigen, dass Z auf XY liegt : 2P

Vollständige Lösung: 7P

11. Déterminer toutes les paires (f, g) de fonctions $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

- $f(x) \geq 0$,
- $f(x + g(y)) = f(x) + f(y) + 2yg(x) - f(y - g(y))$.

Réponse: Il y a deux familles de solutions:

- $g \equiv 0$ quelque soit $f \geq 0$ et
- $g(x) = x$ et $f(x) = x^2 + bx + c$ avec $b^2 \leq 4c$.

Solution: Soit (f, g) une solution du problème. Si $g \equiv 0$, alors toutes les fonctions $f \geq 0$ satisfont le problème. On obtient la première solution. Supposons maintenant qu'il existe a tel que $g(a) \neq 0$.

Substituer $x = y - g(y)$ donne $yg(y - g(y)) = 0$ pour tout y et donc $g(y - g(y)) = 0$ pour tout $y \neq 0$. Soit z tel que $g(z) = 0$. Avec $y = z$ dans l'équation de base on obtient $zg(x) = 0$ pour tout x . En particulier, pour $x = a$ on obtient $z = 0$. En d'autres mots, g est injective en 0. Comme $g(y - g(y)) = 0$ pour tout $y \neq 0$, on en conclut que g est l'identité. L'équation de départ devient

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy - f(0).$$

Cela ressemble à une équation de Cauchy mis à part le terme $2xy - f(0)$. En cherchant un peut, on réalise que les fonctions $f(x) = x^2 + bx + c$ satisfont cette équation. Soit donc $h(x) := f(x) - x^2 - f(0)$. L'équation devient

$$h(x + y) = h(x) + h(y).$$

Comme on a supposé $f(x) \geq 0$, on a $h(x) \geq -x^2 - f(0)$. En particulier, le graphe de h n'est pas dense dans \mathbb{R}^2 . Donc $h(x) = bx$ et $f(x) = x^2 + bx + c$ avec $c = f(0)$. A nouveau, on doit avoir $f \geq 0$ et donc $b^2 - 4c \leq 0$.

On termine en vérifiant que ces fonctions sont solutions:

$$\begin{aligned} f(x + g(y)) &= (x + y)^2 + b(x + y) + c \\ &= (x^2 + bx + c) + (y^2 + by + c) + 2xy - c \\ &= f(x) + f(y) - 2yg(x) - f(y - g(y)). \end{aligned}$$

Marking Scheme:

Solution partielle pour un maximum de **4 points**:

- donner explicitement toutes les solutions avec vérification: 1P
- conclure $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy - f(0)$: 3P dont
 - $yg(y - g(y)) = 0$: 1P
 - $g(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ lorsque $g \not\equiv 0$: 1P
- substituer $h_2(x) = f(x) - x^2$ ou $h(x) = f(x) - x^2 - f(0)$ et réécrire l'équation: 1P

Solution complète 7P. Jusqu'à **2 points** peuvent être retirés:

- familles de solutions incomplètes ou trop grandes (eg. oublier $b^2 \leq 4c$): -1P
- ne pas vérifier explicitement les solutions de la forme $f(x) = x^2 + bx + c$: -1P
- petit trou (eg. ne pas justifier Cauchy): -1P

La substitution $h_1(x) := f(x) - f(0)$ (ou équivalent) ne vaut aucun point.

12. David und Linus spielen folgendes Spiel: David wählt eine Teilmenge Q der Menge $\{1, \dots, 2018\}$. Dann wählt Linus eine natürliche Zahl a_1 und berechnet die Zahlen a_2, \dots, a_{2018} rekursiv, wobei a_{n+1} das Produkt der positiven Teiler von a_n ist.

Sei P die Menge der natürlichen Zahlen $k \in \{1, \dots, 2018\}$, für die a_k eine Quadratzahl ist. Linus gewinnt, falls $P = Q$. Ansonsten gewinnt David. Wer hat eine Gewinnstrategie?

Antwort:

Linus.

Lösung:

Wir beweisen, dass Linus eine Gewinnstrategie hat. Sei $a_1 = p^{k_1}$ für eine Primzahl p und eine nichtnegative ganze Zahl k_1 . Dann ist a_n von der Form p^{k_n} für jedes n und es gilt aufgrund der Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = 1 \cdot p \cdot \dots \cdot p^{k_n} = p^{0+1+\dots+k_n} = p^{\frac{k_n(k_n+1)}{2}} \Rightarrow k_{n+1} = \frac{k_n(k_n+1)}{2}$$

Wir bemerken zudem, dass a_n genau dann eine Quadratzahl ist, wenn k_n gerade ist. Also müssen wir zeigen, dass Linus k_1 so wählen kann, dass für alle $n \in \{1, 2, \dots, 2018\}$ die Zahl k_n genau dann gerade ist, wenn $n \in Q$ gilt. Wir behaupten sogar, dass Linus für beliebige Folgenlängen N und beliebige Teilmengen $Q_N \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ ein k_1 finden kann, so dass die Folge k_1, k_2, \dots, k_N die gewünschte Eigenschaft erfüllt. Dafür verwenden wir Induktion:

Für $N = 1$ stimmt die Aussage offensichtlich, Linus wählt k_1 entweder gerade oder ungerade. Nehme nun an, die Aussage stimmt für N und betrachte eine Teilmenge $Q_{N+1} \subseteq \{1, 2, \dots, N+1\}$. Nach Annahme gibt es ein k_1 , so dass die ersten N Folgenglieder die gewünschte Parität haben. Falls k_{N+1} auch die richtige Parität hat, sind wir fertig. Ansonsten betrachten wir $\tilde{k}_1 = k_1 + 2^N$ modulo 2^{N+1} . Es gilt nun der Reihe nach:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_2 &= \frac{\tilde{k}_1(\tilde{k}_1+1)}{2} \equiv \frac{(k_1+2^N)(k_1+2^N+1)}{2} \equiv \frac{k_1^2+2 \cdot 2^N k_1+2^{2N}+k_1+2^N}{2} \\ &\equiv \frac{k_1(k_1+1)}{2} + 2^N k_1 + 2^{2N-1} + 2^{N-1} \equiv k_2 + 2^{N-1} \pmod{2^N} \end{aligned}$$

da $2x \equiv 2y \pmod{2^{N+1}}$ auch $x \equiv y \pmod{2^N}$ impliziert. Dasselbe können wir nun weiter treiben:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_3 &= \frac{\tilde{k}_2(\tilde{k}_2+1)}{2} \equiv \frac{(k_2+2^{N-1})(k_2+2^{N-1}+1)}{2} \equiv k_3 + 2^{N-2} \pmod{2^{N-1}} \\ &\vdots \\ \tilde{k}_{N+1} &= \frac{\tilde{k}_N(\tilde{k}_N+1)}{2} \equiv \frac{(k_N+2^1)(k_N+2^1+1)}{2} \equiv k_{N+1} + 2^0 \equiv k_{N+1} + 1 \pmod{2^1} \end{aligned}$$

Also haben wir durch unsere Änderung an k_1 nur die Parität des letzten Folgenglieds geändert, denn für alle $i \leq N$ gilt

$$\tilde{k}_i \equiv k_i + 2^{N+1-i} \pmod{2^{N+2-i}} \Rightarrow \tilde{k}_i \equiv k_i \pmod{2}$$

Also gibt es in beiden Fällen eine Fortsetzung der Folge, die Länge $N+1$ hat und die gewünschte Eigenschaft erfüllt. Somit findet Linus immer eine Zahl $a_1 = p^{k_1}$, die ihn zum Sieg führt.

Solution 2:

Comme dans la première solution, il suffit de trouver une suite k_n avec les bonnes parités. L'idée ici est de commencer avec k_{2018} qui vaut 0 ou 1 suivant que 2018 appartient à Q ou pas. On veut ensuite remonter jusqu'à k_1 modulo 2^{2018} en préservant les valeurs déjà trouvées. Plus précisément on introduit la fonction

$$\varphi(x) = \frac{x(x+1)}{2}.$$

On vérifie que si $x \equiv y \pmod{2^m}$, alors $\varphi(x) \equiv \varphi(y) \pmod{2^{m-1}}$. De plus, on souhaiterait prouver que φ atteint toutes les valeurs modulo 2^{m-1} . Pour cela soient x, y deux nombres tels que $\varphi(x) \equiv \varphi(y) \pmod{2^{m-1}}$. On peut réécrire cela comme

$$0 \equiv \frac{x(x+1)}{2} - \frac{y(y+1)}{2} = \frac{(x+y+1)(x-y)}{2} \pmod{2^{m-1}}.$$

Il faut donc que $(x+y+1)(x-y) \equiv 0 \pmod{2^m}$, et comme l'un des facteurs est pair alors que l'autre est impair, c'est le cas si et seulement si $y \equiv x \pmod{2^m}$ ou $y \equiv -x-1 \pmod{2^m}$. Cela signifie donc que tout nombre modulo 2^{m-1} peut être obtenu par au plus 2 nombres modulo 2^m . Comme d'autre part il y a deux fois plus de classes d'équivalence modulo 2^m que modulo 2^{m-1} par le principe des tiroirs il faut donc que chaque nombre modulo 2^{m-1} soit obtenu par exactement 2 nombres modulo 2^m . Comme de plus parmi x et $-1-x$ l'un est pair et l'autre impair, on peut donc de plus choisir ce nombre comme étant soit pair soit impair. Ainsi, en partant de $k_{2018} \pmod{2}$, on construit récursivement $k_{2017} \pmod{2^2}, \dots, k_1 \pmod{2^{2018}}$.

Marking Scheme:

- 2P: Explizite Rekursion für k_n und Umformulierung
- +1P: Betrachtung modulo 2^k für verschiedene k .

Lösung 1: +4P: Fertig machen

Solution 2:

- +1P: Introduire φ et essayer de prouver qu'elle est surjective.
- +1P: Prouver que φ est surjective.
- +1P: Prouver qu'une préimage est paire et l'autre est impaire.
- +1P: Conclure.