

SMO - Vorrunde

Zürich, Lausanne, Lugano - 11. Januar 2014

Zeit: 3 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Bestimme alle natürlichen Zahlen $n > 1$, für die $n - d$ ein Teiler von n ist, wobei d der kleinste positive Teiler von n ist, der grösser als 1 ist.
2. Zwei Kreise k_1, k_2 mit Mittelpunkten M_1 bzw. M_2 schneiden sich in den Punkten A und B . Die Tangente an k_1 durch A schneidet k_2 ein weiteres Mal im Punkt P , während die Gerade M_1B k_2 ein weiteres Mal im Punkt Q schneidet. Nehme an, Q liege ausserhalb von k_1 und es gelte $P \neq Q$. Zeige, dass PQ parallel zu M_1M_2 ist.
3. Wie viele achtstellige natürliche Zahlen gibt es, für die jede Ziffer entweder strikt grösser als alle Ziffern links davon oder strikt kleiner als alle Ziffern links davon ist?
4. Jeder Eckpunkt eines regelmässigen 11-Ecks ist mit genau 4 anderen Eckpunkten durch gerade Strecken verbunden. Zeige, dass man eine Strecke hinzufügen kann, so dass es mindestens ein gleichschenkliges Dreieck gibt.
5. Bestimme alle Primzahlen p , so dass natürliche Zahlen n, m existieren mit

$$\frac{p^2 + 1}{p + 1} = \frac{n^2}{m^2}.$$

Viel Glück!