

Lösungen zur Vorrundenprüfung 2012

Zuerst einige Bemerkungen zum Punkteschema. Eine vollständige und korrekte Lösung einer Aufgabe ist jeweils 7 Punkte wert. Für Komplette Lösungen mit kleineren Fehlern oder Ungenauigkeiten, die aber keinen wesentlichen Einfluss auf die Richtigkeit der dargestellten Lösung haben, geben wir 6 Punkte. Bei unvollständigen Lösungen wird der Fortschritt und der Erkenntnisgewinn bewertet (Teilpunkte). Oft gibt es mehrere Lösungen für ein Problem. Versucht jemand zum Beispiel eine Aufgabe auf zwei verschiedenen Wegen zu lösen, erreicht auf dem ersten Weg 3 Punkte, auf dem zweiten 2 Punkte, dann wird seine Punktzahl nicht 5, sondern 3 sein. Punkte, die auf verschiedenen Wegen erreicht werden, sind also *nicht* kumulierbar. Die unten angegebenen Bewertungsschemata sind nur Orientierungshilfe. Gibt jemand eine alternative Lösung, dann werden wir versuchen, die Punktzahl entsprechend zu wählen, dass für gleiche Leistung gleich viele Punkte verteilt werden. Die Schemata sind stets wie folgt zu interpretieren :

Kommt jemand in seiner Lösung bis und mit hierhin, dann gibt das so viele Punkte. Ausnahmen von dieser Regel sind jeweils ausdrücklich deklariert.

1. 1. Lösung :

$mn|(m+1)(n+2) = mn+2m+n+2 \Leftrightarrow mn|2m+n+2$ weil nun $2m+n+2 > 0$ gilt folgt $mn \leq 2m+n+2 \Leftrightarrow (m-1)(n-2) \leq 4$. Somit gilt für alle Lösungen $m = 1$ oder $n = 1$ oder $n = 2$ oder $(m \leq 5$ und $n \leq 6)$, denn für $m \geq 2$ und $n \geq 3$ gilt $m-1 \leq (m-1)(n-2) \leq 4$ und $n-2 \leq (m-1)(n-2) \leq 4$. Im ersten Fall muss also gelten $n|2n+4 \Leftrightarrow n|4$, also $n \leq 4$. Im zweiten Fall muss gelten $m|3m+3 \Leftrightarrow m|3$, also $m \leq 3$. Im dritten Fall gilt $2m|4m+4 \Leftrightarrow m|2$, also $m \leq 2$. Insbesondere gilt in jedem Fall $m \leq 5$ und $n \leq 6$. Durchtesten liefert die Lösungen $(m, n) = (1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 4), (5, 3)$.

2. Lösung :

$m|mn|(m+1)(n+2) = mn+2m+n+2 \Rightarrow m|n+2, n|mn|mn+2m+n+2 \Rightarrow n|2(m+1)$. Daraus folgt $m \leq n+2$ und $(n = 2m+2$ oder $n \leq m+1)$, da der zweitgrösste Teiler höchstens halb so gross ist wie die Zahl selbst. Das heisst es gibt die folgenden Fälle zu unterscheiden : $n = 2m+2, n = m+1, n = m, n = m-1, n = m-2$. Im ersten Fall gilt $m|2m+4 \Leftrightarrow m|4$, also sind $(1, 4), (2, 6), (4, 10)$ potenzielle Lösungen. Im zweiten Fall gilt $m|m+3 \Leftrightarrow m|3$, also sind $(1, 2), (3, 4)$ potenzielle Lösungen. Im dritten Fall gilt $m|m+2 \Leftrightarrow m|2$, also sind $(1, 1), (2, 2)$ potenzielle Lösungen. Im vierten Fall gilt $m|m+1 \Leftrightarrow m|1$, also keine potenzielle Lösung (denn $n > 0$). Im fünften Fall gilt $n|2(n+3) \Leftrightarrow n|6$, also sind $(3, 1), (4, 2), (5, 3), (8, 6)$ potenzielle Lösungen. Durchtesten aller potenziellen Lösungen liefert die Lösungen $(m, n) = (1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 4), (5, 3)$.

Zum Punkteschema :

Einen Punkt gibt es entweder für die Ungleichung $mn \leq 2m + n + 2$ oder die beiden Teilbarkeitsbedingungen $m|n+2$ und $n|2(m+1)$, wobei man nicht beide Punkte machen konnte. Für das Finden einer Schranke für eine oder beiden Variablen konnte man maximal 4 bzw. 5 Punkte holen. Für Rechnungsfehler oder vergessene Fälle wurden maximal 2 Punkte abgezogen.

Für das Finden von Lösungen alleine gibt es keine Punkte.

2. Weil keine drei Chips einer Farbe im selben Stapel sein dürfen, ist in jedem Stapel von jeder Farbe mindestens ein Chip (wären in einem null, wären im anderen drei). Da ein Stapel $3n$ Chips enthält, enthält er von n Farben 2 Chips und von den anderen n Farben 1 Chip. Durch die Zusammensetzung eines Stapel ist die Zusammensetzung des anderen Stapels eindeutig bestimmt. Wenn die Reihenfolge der Chips in den Stapeln unwichtig ist (Aufgabe a), reicht es deshalb zu entscheiden, welche n Farben im ersten Stapel doppelt vorkommen. Es gibt $\binom{2n}{n}$ Möglichkeiten n Farben aus $2n$ Farben auszuwählen.

Wir überlegen uns, auf wieviele Arten wir eine Aufteilung der Chips auf zwei Stapel wie in a) ordnen können. Könnten wir 2 Chips derselben Farbe unterscheiden gäbe es $(3n)!$ Möglichkeiten einen Stapel zu ordnen. Nun teilen wir durch 2^n , da wir von n Farben zwei Chips im Stapel haben und wir je zwei gleichfarbige Chips entweder vertauschen können oder nicht und sich dabei am Aussehen des Stapels nichts ändert. Wir hatten jede Möglichkeit 2^n mal gezählt. Nun multiplizieren wir die Anzahl Möglichkeiten die Chips auf zwei Stapel aufzuteilen mit der Anzahl Möglichkeiten den ersten Stapel zu ordnen mit der Anzahl Möglichkeiten den zweiten Stapel zu ordnen : $\binom{2n}{n} \frac{(3n)!}{2^n} \frac{(3n)!}{2^n} = \binom{2n}{n} \left(\frac{(3n)!}{2^n}\right)^2$ Dies ist die Antwort für b). Beachte dabei, dass 2 unterschiedliche Aufteilungen der Chips auf die beiden Stapel wie in a) durch Ordnen der Chips nicht gleich werden können und dass wir, unabhängig davon, wie wir die Chips in a) aufteilen, immer genau $\left(\frac{(3n)!}{2^n}\right)^2$ Möglichkeiten haben, die beiden Stapel zu ordnen. Deshalb haben wir nichts doppelt gezählt und dürfen die Anzahl Möglichkeiten multiplizieren.

Zum Punkteschema :

a) 2 Punkte gab für eine Feststellung in der Art, dass man entscheiden muss, welche n Farben im ersten Stapel doppelt vorkommen.

1 Punkt falls, man das obige erkannt hat und nun die Anzahl Möglichkeiten n Farben aus $2n$ Farben auszuwählen berechnet bzw. die Formel $\binom{2n}{n}$ hinschreibt.

b) 1 Punkt für die Feststellung, dass man a) verwenden kann und nun noch die Stapel ordnen muss

2 Punkte falls man richtig berechnet auf wieviele Arten man einen Stapel ordnen kann, es muss $\frac{(3n)!}{2^n}$ dastehen.

Wenn man hier grobe Fehler gemacht hat, ist der nächste Punkt nicht möglich. Hat man in Aufgabe b) richtig argumentiert aber einen kleinen Fehler im Zählen gemacht, bekommt man die obigen 2 Punkte nicht, kann jedoch noch den nächsten holen.

1 Punkt für die richtige Verknüpfung der herausgefundenen Formeln : $\binom{2n}{n} \left(\frac{(3n)!}{2^n}\right)^2$

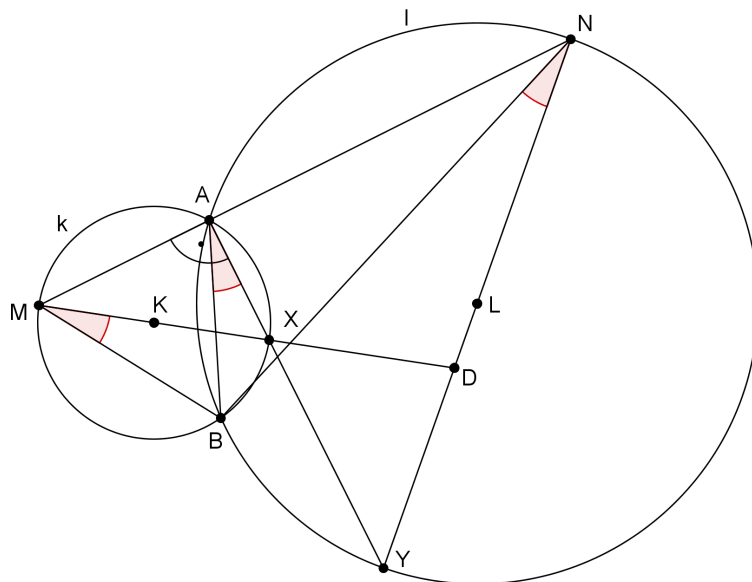
3. 1. Lösung :

Sei X der Schnittpunkt von MK und k (mit $X \neq M$) und sei Y der Schnittpunkt von NL und l (mit $Y \neq N$). Da K und L Kreismittelpunkte sind, liegt A gerade auf den Thaleskreisen über MX und NY und somit gilt $\angle MAX = 90^\circ$ und $\angle NAY = 90^\circ$. Dies bedeutet, dass X und Y beide auf der Senkrechten durch A zu MN liegen, d.h. dass A , X und Y auf einer Geraden liegen. Mit dem Peripheriewinkelsatz erhalten wir nun :

$$\angle BMD = \angle BMX = \angle BAX = \angle BAY = \angle BNY = \angle BND$$

Somit ist $MBDN$ ein Sehnenviereck und die Punkte liegen auf einem Kreis.

Falls jemand gesehen hat, dass $\angle MAX = 90^\circ$ oder $\angle NAY = 90^\circ$ gilt, so war das 2 Punkte wert. Wenn daraus geschlossen wurde, dass A , X , Y auf einer Geraden liegen, so gab dies weitere 3 Punkte.



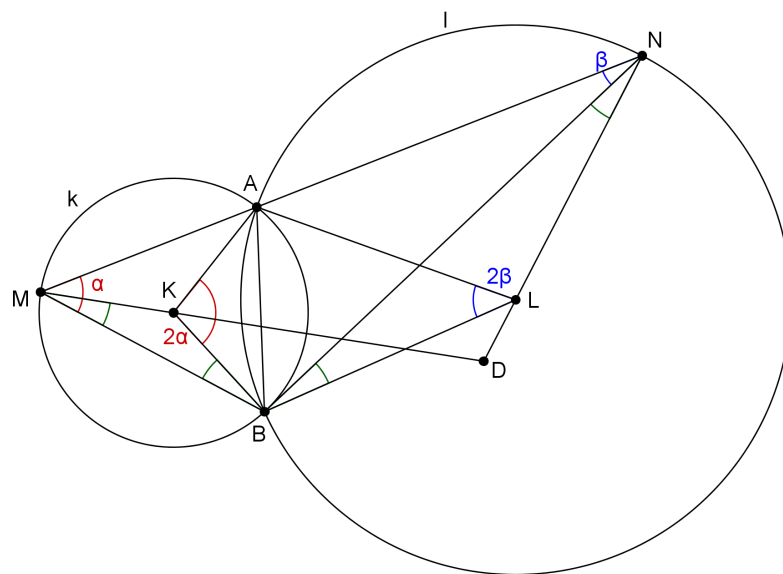
2. Lösung :

Sei $\alpha = \angle BMA$ und $\beta = \angle BNA$. Aus dem Zentriwinkelsatz folgt $\angle BKA = 2\alpha$ und $\angle BLA = 2\beta$. Weiter folgt mit der Innenwinkelsumme im Dreieck MBN bzw. im Drachen $AKBL$, dass $\angle MBN = 180^\circ - \alpha - \beta$ und $\angle KBL = 180^\circ - \alpha - \beta$ gilt (man beachte, dass $\angle KBL = \angle KAL$). Wegen $\angle MBN = \angle KBL$ muss aber auch $\angle MBK = \angle NBL$ gelten. Da K und L die Kreismittelpunkte sind, sind die Dreiecke MBK und NBL gleichschenkelig. Nun erhalten wir :

$$\angle BMD = \angle BMK = \angle MBK = \angle NBL = \angle BNL = \angle BND$$

Somit ist $MBDN$ ein Sehnenviereck und die Punkte liegen auf einem Kreis.

Falls jemand gezeigt hat, dass $\angle MBN = \angle KBL$ gilt, so war das 3 Punkte wert. Einen weiteren Punkt gab es für $\angle MBK = \angle NBL$



4. Da a_k eine arithmetische Folge ist, können wir schreiben

$$a_k = x + kd,$$

wobei x und d ganze Zahlen sind. Bemerke, dass $d = a_{i+1} - a_i$ genau die Differenz von zwei aufeinanderfolgenden Folgengliedern ist.

Per Definition haben wir nun

$$k|a_k = x + kd \text{ und } k|kd \Rightarrow k|x$$

Also gilt $k|x$ für alle $x \in \{1, 2, \dots, 50\}$. Nun schreiben wir $51 = 3 * 17$. Aus vorheriger Überlegung wissen wir, dass $3|x$ und $17|x$. Da $\text{ggt}(3, 17) = 1$ folgt daraus, dass $51|x$. Deshalb gilt :

$$51|x + 51d = a_{51}$$

Das genau gleiche Argument funktioniert für a_{52} , da $52 = 4 * 13$ und $\text{ggt}(4, 13) = 1$. Um zu sehen, dass dies im Allgemeinen für a_{53} nicht funktioniert, konstruieren wir ein explizites Beispiel. Betrachte die Folge

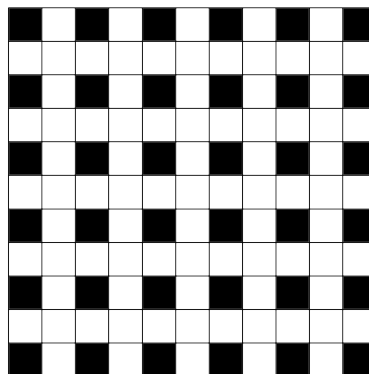
$$a_k = 52! + k$$

Es ist klar, dass $k|a_k$ für alle $k \in \{1, 2, \dots, 52\}$. Allerdings ist 53 eine Primzahl. Deshalb gilt $53 \nmid 52!$ und $53 \nmid 52! + 53 = a_{53}$. Das heisst, es gibt arithmetische Folgen, welche die Bedingung aus der Aufgabenstellung erfüllen, sodass a_{53} nicht durch 53 teilbar ist.

Zum Punkteschema :

- Bei Teilaufgabe a) gibt es 0 oder 4 Punkte.
- Bei Teilaufgabe b) gibt es einen Punkt, wenn man versucht zu verwenden, dass $k|x$ für alle $k \leq 50$.
- Für die *explizite* Konstruktion eines Beispiels mit $53 \nmid a_{53}$ gibt es 2 weitere Punkte. Beachte, dass die explizite Konstruktion eines Beispiels zur vollständigen Lösung gehört. Es reicht nicht, zu zeigen, dass die Methode aus Teilaufgabe a) nicht funktioniert!

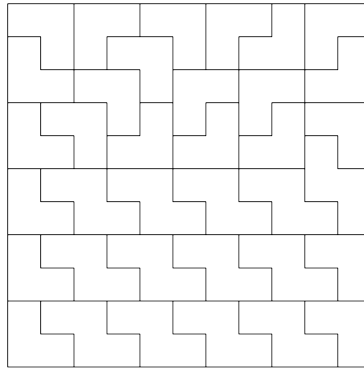
5. Um die 121 Felder des Quadrats vollständig zu überdecken, benötigen wir sicher 3, 7, 11, 15, 19, 23, ... L-Triominos und entsprechend 28, 25, 22, 19, 16, 13, ... Teile der Fläche 4. Wir betrachten jetzt folgende Färbung des 11×11 -Bretts :



Diese Färbung enthält 36 schwarze Felder. Wir stellen fest, dass jeder 2×2 -Block und jedes Skew-Tetromino genau ein schwarzes Feld bedeckt.

Wenn wir also genau 28, 25, 22, 19, 16 respektive 13 Blöcke der Fläche 4 verwenden, dann verbleiben 8, 11, 14, 17, 20 respektive 23 schwarze Felder die mit 3, 7, 11, 15, 19 respektive 23 L-Triominos bedeckt werden müssten.

Wir stellen ebenfalls fest, dass ein L-Triomino höchstens 1 schwarzes Feld bedecken kann. Wir brauchen also mindestens 23 L-Triominos um das Brett zu bedecken. Wie folgendes Bild zeigt, ist das auch tatsächlich möglich :



Zum Punkteschema :

- Färbung, bei der jeder 2×2 -Block und jedes Skew-Tetromino eine invariante Färbung aufweist *und* mit der man eine nicht-triviale Anzahl (> 3) von L-Triominos zeigt : 1 Punkt.
- Färbung, mit der man ≥ 23 L-Triominos zeigt : +4 Punkte.
- Beispiel mit 23 L-Triominos : +2 Punkte.