

IMO Selektion 2012

erste Prüfung - 28. April 2012

Zeit: 4.5 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Finde in Abhängigkeit von n die grösste natürliche Zahl d , sodass eine Permutation a_1, a_2, \dots, a_n der Zahlen $1, 2, \dots, n$ existiert mit

$$|a_i - a_{i+1}| \geq d, \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

2. Eine ganze Zahl m ist eine *echte Potenz*, falls es positive ganze Zahlen a und n gibt, sodass $n > 1$ und $m = a^n$.

- (a) Zeige, dass es 2012 verschiedene positive ganze Zahlen gibt, sodass sich keine nichtleere Teilmenge davon zu einer echten Potenz aufsummiert.
- (b) Zeige, dass es 2012 verschiedene positive ganze Zahlen gibt, sodass sich jede nichtleere Teilmenge davon zu einer echten Potenz aufsummiert.

3. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit Umkreis k . Sei S der Schnittpunkt von AB und CD und T der Schnittpunkt der Tangenten an k in A und C . Zeige, dass $ADTS$ genau dann ein Sehnenviereck ist, wenn BD die Strecke AC halbiert.

Viel Glück !

IMO Selektion 2012

zweite Prüfung - 29. April 2012

Zeit: 4.5 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Im Dreieck ABC sei $\angle BAC = 60^\circ$. Sei E ein Punkt auf der Geraden AB , sodass B zwischen A und E liegt und $BE = BC$ gilt. Analog sei F ein Punkt auf AC , sodass C zwischen A und F liegt und $CF = BC$ gilt. Der Umkreis von ACE schneide EF in K . Zeige, dass K auf der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ liegt.

5. Sei $n \geq 6$ eine natürliche Zahl. Betrachte eine Menge S von n verschiedenen reellen Zahlen. Beweise, dass es mindestens $n - 1$ verschiedene zweielementige Teilmengen von S gibt, sodass das arithmetische Mittel der beiden Elemente in jeder dieser Teilmengen mindestens gleich dem arithmetischen Mittel aller Elemente in S ist.

6. Finde alle surjektiven Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x + f(x) + 2f(y)) = f(2x) + f(2y)$$

Viel Glück !

IMO Selektion 2012

dritte Prüfung - 12. Mai 2012

Zeit: 4.5 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Seien p, q zwei Primzahlen mit

$$pq \mid 2012^{p+q-1} - 1.$$

Zeige, dass genau eine der Primzahlen 2011 ist.

8. Seien f, g zwei Polynome mit ganzen Koeffizienten und seien a, b ganzzahlige Fixpunkte von $f \circ g$. Beweise, dass ganzzahlige Fixpunkte c, d von $g \circ f$ existieren mit $a + c = b + d$.
Hinweis: Für zwei Polynome p, q ist $p \circ q$ durch $(p \circ q)(x) = p(q(x))$ definiert.
9. Bestimme die grösste natürliche Zahl k mit der folgenden Eigenschaft: Die Menge der natürlichen Zahlen kann so in k disjunkte Teilmengen A_1, \dots, A_k aufgeteilt werden, dass sich jede natürliche Zahl $n \geq 15$ für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ als Summe zweier verschiedener Elemente aus A_i schreiben lässt.

Viel Glück !

IMO Selektion 2012

vierte Prüfung - 13. Mai 2012

Zeit: 4.5 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $abc \geq 1$. Beweise die Ungleichung

$$\frac{a^4 - 1}{ab^3 + abc + ac^3} + \frac{b^4 - 1}{bc^3 + abc + ba^3} + \frac{c^4 - 1}{ca^3 + abc + cb^3} \geq 0.$$

11. Sei I der Inkreismittelpunkt und AD der Durchmesser des Umkreises eines Dreiecks ABC . Seien E und F Punkte auf den Strahlen BA und CA mit

$$BE = CF = \frac{AB + BC + CA}{2}.$$

Zeige, dass sich die Geraden EF und DI rechtwinklig schneiden.

12. Finde alle ganzen Zahlen $m, n \geq 2$, welche die folgenden zwei Bedingungen erfüllen:

- (i) $m + 1$ ist eine Primzahl von der Form $4k + 3$ für eine ganze Zahl k .
- (ii) Es existiert eine Primzahl p und eine nichtnegative ganze Zahl a mit

$$\frac{m^{2^n-1} - 1}{m - 1} = m^n + p^a.$$

Viel Glück !