Lösungen zur Finalrundenprüfung 2011

1. 1. Lösung:

Zuerst zeigen wir, dass mindestens 2011 Zeitpunkte benötigt werden. Betrachte eine Person A und deren Nachbarn B, C, die verschieden sind da $2011 \geq 3$. A muss sicherlich mit jeder anderen Person anstossen, daher vergehen schon mindestens 2010 Zeitpunkte. Betrachte nun jeden Zeitpunkt in dem A anstosst. Entweder stosst A mit B oder C oder einem der anderen 2008 Personen an, in den ersten zwei Fällen können B und C nicht zum gleichen Zeitpunkt anstossen, denn dann würde B respektive C zu einem Zeitpunkt mit zwei Personen anstossen, was nicht erlaubt ist. Im letzteren Fall stossen A und eine Person D ($D \neq B, C$) an, da zu einem Zeitpunkt nicht übers Kreuz angestossen werden darf teilt die Verbindung AD den Tisch in zwei Teile auf, wobei zwei Personen aus verschiedenen Teilen zu jenem Zeitpunkt nicht antossen können. Es sind nun B, C in verschiedenen Teilen des Tisches. Das heisst zusammengefasst zu jedem Zeipunkt, an dem A anstosst können B und C nicht anstossen, somit werden mindestens 2011 Zeitpunkte benötigt.

Nun zeigen wir, dass 2011 Zeitpunkte ausreichen, dazu beschrifte die Personen der Reihe nach am Tisch entlang mit $0, 1, 2, \ldots, 2010$. Zu jedem Zeitpunkt $t = 1, 2, \ldots, 2011$ stossen nun alle Paare von verschiedenen Personen a, b mit $a + b \equiv t \operatorname{mod}(2011)$ an. Nehme an eine Person a stosse zu einem Zeitpunkt t mit zwei verschiedenen Personen b, c an. Dann gilt: $a + b \equiv t \operatorname{mod}(2011)$ und $a + c \equiv t \operatorname{mod}(2011)$ daher auch $b - c \equiv 0 \operatorname{mod}(2011)$ und da $0 \leq, b, c \leq 2010$ sogar $b = c$ Widerspruch. Vier Personen $a < b < c < d$ stossen genau dann übers Kreuz an, wenn zum gleichen Zeitpunkt a mit c und b mit d anstossen. Nehme an dies würde passieren zum Zeitpunkt t, dann würde gelten: $a + c \equiv t \equiv b + d \operatorname{mod}(2011) \Rightarrow c - b \equiv d - a \operatorname{mod}(2011)$, wobei $0 < c - b < d - a < 2011$ Widerspruch. Es bleibt noch zu zeigen, dass jede Person mit allen anderen anstosst. Seien a, b verschiedene Personen, dann stossen sie nach Konstruktion zum Zeitpunkt $t = a + b \operatorname{mod}(2011)$ an.

2. Lösung:

Zu jedem Zeitpunkt kann maximal $\left\lfloor \frac{2011}{2} \right\rfloor = 1005$-mal angestossen werden. Insgesamt muss $\binom{2011}{2}$-mal angestossen werden, das heisst es werden mindestens $\left\lceil \binom{2011}{2} / 1005 \right\rceil = 2011$ Zeitpunkte benötigt.

Wir zeigen nun, dass 2011 Zeipunkte ausreichen, dazu definieren wir Parallelklassen wie folgt: Jede Verbindung zum Anstossen zweier verschiedener Personen a, b teilt alle Personen in folgende Mengen auf: Diejenigen die verbunden sind, und zwei weitere Mengen C, D für die gilt, falls c eine Person in C und d eine Person in D so können diese nicht zum gleichen Zeitpunkt anstossen wie a und b, je zwei Personen aus C respektive D hingegen schon. Eine der Mengen C, D enthält nun eine ungerade Anzahl Personen. Ordnet man jene dem Kreis entlang, so gibt es eine eindeutige Person e, die genau in der Mitte der geordeneten Personen ist. Wir sagen die Person e ist der Vertreter der Anstossverbindung ab. Zu einem Zeitpunkt $t = 1, 2, \dots, 2011$ stossen nun alle Paare von verschiedenen Personen an, deren Vertreter gerade die t-te Person ist. Es ist klar, dass jede Person mit jeder anderen Person anstosst, da jede Anstossverbindung einen Vertreter hat. Um zu zeigen, dass keine Anstossregel verletzt wird, führen wir die Distanz zum Vertreter ein, die sich wie folgt definiert: Seien a, b zwei verschiedene Personen und e deren Vertreter, die Distanz von a zu e definiert sich als das Minimum der Anzahl Personen, die zwischen a und e sitzen, wobei man entlang dem Tisch in Uhr- und Gegenuhrzeigensinn zählt. Da e nun gerade in der Mitte zwischen a, b ist die Distanz von b und e gerade dieselbe, es wird einfach in die andere Richtung gezählt, denn sonst wäre $a = b$. Nehme an eine Person a würde zu einem Zeitpunkt t gleichzeitig mit zwei verschiedenen Personen b und c anstossen. Sei e die t-te Person. Nun ist e der Vertreter von ab und ac und es gilt die Distanz von b zu e ist gleich der Distanz von a zu e ist gleich der Distanz von c zu e, nun wird aber bei b und c in die gleiche Richtung gezählt, also gilt $b = c$ Widerspruch. Nehme an zu einem Zeitpunkt t wird stossen a mit b und c mit d übers Kreuz an. Sei nun e die t-te Person. Ohne Beeinschränkung der Allgemeinheit gilt, dass die Distanz von a und e grösser ist als die von c und e. Die Verbidung ab teilt den Tisch in zwei Teile in einer ist e und nach der Distanz zu e sin c und d auch in jenem Teil und stossen daher ohne zu überkreuzen an. Widerspruch!

2. 1. Lösung:

Wir führen Winkelbezeichnungen ein:

$$\angle AFE = \angle BFD = \gamma, \quad \angle BDF = \angle CDE = \alpha, \quad \angle CED = \angle AEF = \beta$$

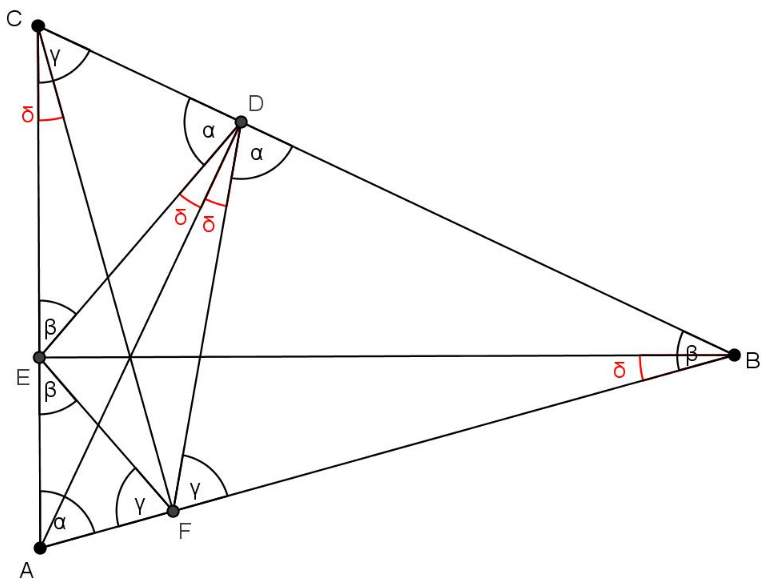


Abbildung 1: Skizze

Wir bilden die Innenwinkelsumme im Dreieck DEF:

$$(180^\circ - 2\alpha) + (180^\circ - 2\beta) + (180^\circ - 2\gamma) = 180^\circ \Longrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Mit den Innenwinkelsummen in den Dreiecken AFE, BDF und CED erhalten wir die Winkel des Dreiecks ABC:

$$\angle CAB = \alpha, \quad \angle ABC = \beta, \quad \angle BCA = \gamma$$

Nun gilt:

$$\angle EAB + \angle EDB = \angle CAB + (180^\circ - \angle EDC) = \alpha + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ$$

Somit ist ABDE ein Sehnenviereck. Analog erhalten wir, dass auch BCEF und CAFD Sehnenvierecke sind. Daraus folgt jetzt:

$$\begin{aligned} \angle ADF &= \angle ACF \text{ (Sehnenviereck CAFD)} \\ \angle ACF = \angle ECF &= \angle EBF \text{ (Sehnenviereck BCEF)} \\ \angle EBF = \angle EBA &= \angle EDA \text{ (Sehnenviereck ABDE)} \end{aligned}$$

Es folgt also $\angle ADF = \angle EDA$ und somit auch:

$$\angle CDA = \angle CDE + \angle EDA = \angle BDF + \angle ADF = \angle ADB$$

Da $\angle CDA + \angle ADB = 180^\circ$ und $\angle CDA = \angle ADB$ gilt, sind beide 90° und somit steht AD senkrecht auf BC. Dann ist AD aber gerade die Höhe und D der Höhenfusspunkt.
Analog erhalten wir, dass E und F die Fusspunkte der Höhen von B bzw. C sind.

2. Lösung:

Seien α, β und γ wie in der 1. Lösung. Sei X ein Punkt auf der Verlängerung der Seite DF auf der Seite von F und Y ein Punkt auf der Verlängerung der Seite DE auf der Seite von E. Es gilt nun $\angle AFX = \angle DFB = \gamma$ und $\angle AEY = \angle DEC = \beta$. AF und AE sind dann aber gerade die Winkelhalbierenden der Winkel $\angle XFE$ und $\angle YEF$ und somit ist A der Ankreismittelpunkt des Dreiecks DEF auf der Seite von EF. A liegt dann aber auch auf der Winkelhalbierenden von $\angle EDF$ und somit gilt $\angle EDA = \angle ADF$. Hieraus folgt sofort, dass D Höhenfusspunkt ist. Analog erhalten wir, dass auch E und F Höhenfusspunkte sind.

3. Sei $A = |2011^m - 45^n|$. Für $m = 1$ und $n = 2$ erhalten wir $A = 14$, was minimal ist, wie wir nun zeigen werden. Betrachtet man A mod 45 erhält man gerade die Vereinugung der Restklassen von 2011^m und -2011^m mod 45. Nach einer kurzen Rechnung findet man somit $A \equiv 1, -1, 14, -14, 16$ oder -16 mod 45. Aber da A sicher gerade ist gilt $A \geq 2$ also mindestens 14.

4. Aus $a = b = c = d = 1$ folgt sofort, dass $f(1) = 1$ ist. Für $c = d = 1$ gilt nun

$$f(a) + f(1/a) = a + 1/a.$$

Andererseits ergibt $b = d = 1$

$$(f(a) + 1)(f(1/a) + 1) = 2 + a + 1/a \tag{1}$$

und aus diesen zwei Gleichungen folgt nun, dass $f(a)f(1/a) = 1$ gilt für alle $a > 0$. Multipliziert man Gleichung (1) mit $af(a)$ und faktorisiert erhält man damit

$$(f(a) - a)(af(a) - 1) = 0$$

oder äquivalent dazu $f(a) = a$ oder $f(a) = 1/a$ für alle $a > 0$. Nimmt man an, es gäbe $a, b \neq 1$ mit $f(a) = a$ und $f(b) = 1/b$ so folgt aus der ersten Gleichung (mit $c = 1/a$ und $d = 1/b$) dass

$$ab + \frac{1}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

Letzteres ist aber äquivalent zu

$$(a^2 - 1)(b^2 - 1) = 0,$$

im Widerspruch zur Annahme $a, b \neq 1$. Es bleibt zu kontrollieren, dass die beiden Funktionen $f(a) = a$ und $f(b) = b$ tatsächlich Lösungen sind.

5. Sei $\angle BCA = \alpha$. Mit dem Sehnentangentenwinkelsatz erhalten wir $\angle TBA = \alpha = \angle TAB$. Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck ABT und dem Sehnenviereck BDAT gilt:

$$\angle BDA = 180^\circ - \angle BTA = 2\alpha$$

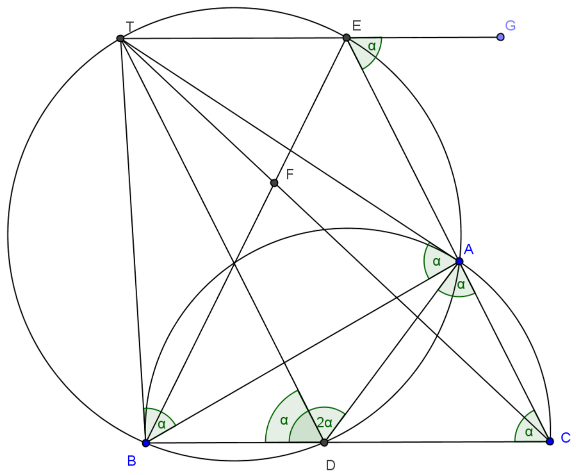


Abbildung 2: Skizze

Anwendung des Aussenwinkelsatzes am Dreieck DCA bei D liefert:

$$\angle DAC = \angle ADB - \angle DCA = \alpha = \angle DCA$$

Das Dreieck DCA ist also gleichschenklig und somit gilt $DA = DC = DB$. Dies bedeutet wiederum, dass D gerade der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC ist. Wegen der

Konstruktion von T folgt nun $\angle BDT = \angle TDA = \alpha$ und somit $\angle BDT = \angle DCE$, also sind TD und EC parallel.
Sei G ein Punkt auf der Verlängerung der Seite ET auf der Seite von E (also EG¡GT). Mit dem Sehnenviereck TBAE folgt:

$$\angle GEA = 180^\circ - \angle TEA = 180^\circ - (180^\circ - \angle TBA) = \alpha = \angle DCA$$

TE und CD sind somit ebenfalls parallel. DCET ist also ein Parallelogramm und es gilt $ET = DC$. Da BC und ET parallel sind, sind die Dreiecke BCF und FET ähnlich und es gilt:

$$\frac{BF}{FE} = \frac{BC}{TE} = \frac{2 \cdot DC}{DC} = 2$$

6. 1. Lösung:

Einsetzen der Nebenebdingung $a+b+c+d=1$ in die linke Seite der Ungleichung liefert:

$$2\frac{a+b+c+d}{(a+b)(c+d)} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{cd}}$$

Dann folgt aus AM-GM, angewandt auf den Nenner:

$$2\frac{a+b+c+d}{(a+b)(c+d)} = \frac{2}{a+b} + \frac{2}{c+d} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{cd}}$$

2. Lösung:

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d)\left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{cd}}\right) &= \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)(c+d) + \left(\sqrt{\frac{c}{d}} + \sqrt{\frac{d}{c}}\right)(a+b) \\ &\overset{\text{AM-GM}}{\geq} 2(c+d) + 2(a+b) = 2\end{aligned}$$

7. O.B.d.A. $r \geq 0$ und sogar $r > 0$, da die linke Seite positiv ist.
Sei zuerst $z = 0$, dann hat man $3 = r^2$, was keine Lösung hat, da $\sqrt{3}$ irrational ist.
Sei nun $z > 0$ und schreibe $r = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, $\text{ggT}(p,q) = 1$. Dann ist die Gleichung äquivalent zu $2q^2(2^{z-1}+1) = p^2$. Die linke Seite ist durch 2 teilbar, daher auch die rechte und somit $2|p$. Ist nun $z \geq 2$ so ist die rechte Seite durch 4 teilbar, aber die linke nicht. Einsetzen von $z = 1$ liefert $2^1 + 2 = 4 = 2^2$.
Sei nun $z < 0$, schreibe $n = -z$ und multipliziere die Gleichung mit $q^2 2^n$, dann erhält man $q^2(2^{n+1}+1) = 2^n p^2$ es folgt nun $2^{n+1}+1 | p^2$ da $\text{ggT}(2^{n+1}+1, 2^n) = 1$, und $p^2 | 2^{n+1}+1$, da $\text{ggT}(p^2, q^2) = 1$. Damit erhält man $2^{n+1}+1 = \pm p^2$, es kann nicht $-$ sein, da dann die rechte Seite negativ aber die linke Seite positiv ist. Das heisst es gilt $2^{n+1} = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$. Folglich sind $p-1$ und $p+1$ Zweierpotenzen und die einzigen Zweierpotenzen mit Differenz 2 sind $2, 4$ und somit $p = 3$, daraus folgt $z = -n = -2$. Einsetzen liefert $2^{-2} + 2 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$.
Die einzigen Lösungen sind also -2 und 1.

8. 1. Lösung:

Seien H_A und H_C die Fusspunkte der Höhen von A und C. H_A und H_C liegen auf dem Thaleskreis über AC und somit können wir den Potenzsatz anwenden:

$$HH_A \cdot HA = HH_C \cdot HC$$

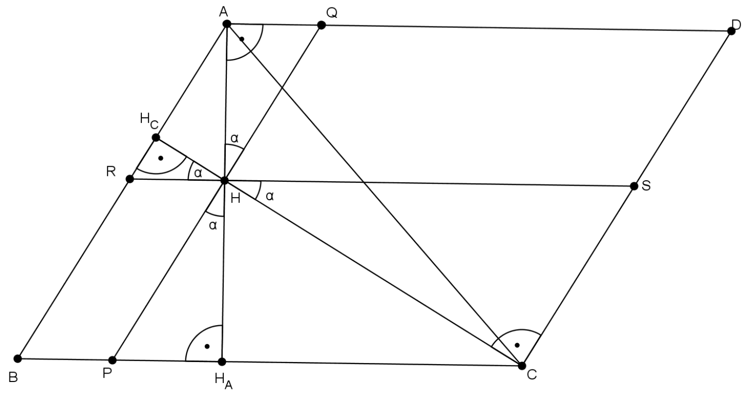


Abbildung 3: Skizze

AD und BC sind parallel, also gilt $\angle HAD = \angle HH_AB = 90°$. Analog erhalten wir auch $\angle HCS = 90°$.
Sei $\angle PHH_A = \alpha$. $\angle AHQ$ ist als Scheitelpunktswinkel ebenfalls α. Mit der Innenwinkelsumme im Dreieck PHH_A erhalten wir $HPH_A = 90° - \alpha$. Da $HPCS$ ein Parallelogramm ist, beträgt $\angle CSH$ ebenfalls $90° - \alpha$. Mit der Innenwinkelsumme im Dreieck HCS erhalten wir jetzt $\angle CHS = \alpha$. $\angle H_CHR$ ist als Scheitelpunktswinkel ebenfalls α. Nun sehen wir, dass die Dreiecke PH_AH, CSH, QAH und H_CRH alle ähnlich sind. Unter Ausnutzung dieser Ähnlichkeit erhalten wir jetzt:

$$HP \cdot HQ = \frac{HR \cdot HH_A}{HH_C} \cdot \frac{HS \cdot HA}{HC} = HR \cdot HS \cdot \frac{HH_A \cdot HA}{HH_C \cdot HC} = HR \cdot HS,$$

wobei wir im letzten Schritt die zu Beginn hergeleitete Gleichung benutzt haben. P, Q, R und S liegen nach der Umkehrung des Potenzsatzes also auf einem Kreis.

2. Lösung:

Seien H_A und H_C die Fusspunkte der Höhen von A und C. Wegen parallelen Geraden gilt $\angle ARH = \angle HPC$. H_A und H_C liegen auf dem Thaleskreis über AC und somit gilt $\angle H_CAH_A = \angle H_CCH_A$. Daraus folgt, dass die Dreiecke RAH und HCP ähnlich sind. Es gilt somit:

$$\frac{HR}{HP} = \frac{RA}{PC} = \frac{HQ}{HS},$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass aufgrund der Parallelen und Parallelogramme $RA = HQ$ und $PC = HS$ gilt. Die obige Gleichung ist äquivalent zu:

$$HR \cdot HS = HQ \cdot HP,$$

und mit der Umkehrung des Potenzsatzes folgt nun, dass P, Q, R, S auf einem Kreis liegen.

9. 1. Lösung:

Wir beginnen mit einer allgemeinen Bemerkung. Sei $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 1 \text{ oder } 9 \bmod(10)\}$ die Menger der natürlichen Zahlen, die auf 1 oder 9 enden und $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 3 \text{ oder } 7 \bmod(10)\}$. Man stellt nun fest, dass für $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$ gilt: $aa', bb' \in A$ und $ab \in B$.
Für die Lösung der Aufgabe schreiben wir $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$, wobei $p_1, p_2, \ldots, p_r$ paarweise verschiedene Primzahlen sind und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$. Bekanntlich entspricht jeder Teiler von n einem r-Tupel von ganzen Zahlen $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r)$ mit $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ für $1 \leq i \leq r$. Da wir nur die Teiler von n in A bzw. B zählen wollen, können wir o.B.d.A annehmen, dass $p_i \neq 2$ oder 5 für $1 \leq i \leq r$. Sei nun $0 \leq s \leq r$ so, dass $p_1, p_2 \ldots, p_s \in A$ und $p_{s+1}, p_{s+2}, \ldots, p_r \in B$. Wegen der Bemerkung am Anfang gilt nun für einen Teilder d von n:

$$d \in A \Longleftrightarrow \beta_{s+1} + \beta_{s+2} + \cdots + \beta_r \text{ gerade}$$
$$d \in B \Longleftrightarrow \beta_{s+1} + \beta_{s+2} + \cdots + \beta_r \text{ ungerade}$$

Insbesondere können wir also auch $s = 0$ annehmen. Es bleibt zu zeigen, dass es mehr gerade Summen der Form $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r$ gibt, als ungerade. Dies zeigen wir mit einer Induktion nach r, wobei wir mit G_r die Anzahl gerader Summen und mit U_r die Anzahl ungerader Summen bezeichnen. Für $r = 1$ ist die klar, da $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$ und die Zahl 0 gerade ist. Für den Induktionsschritt verwenden wir die rekursiven Relationen $G_{r+1} = G_r G_1 + U_r U_1$ sowie $U_{r+1} = G_r U_1 + U_r G_1$. Den wenn wir nun die Differenz bilden, erhalten wir $G_{r+1} - U_{r+1} = (G_r - U_r)(G_1 - U_1) \geq 0$, womit der Induktionsschritt und die Aufgabe bewiesen ist.

2ème solution:

On commence avec la même observation que dans la solution précédente: Si $a, a' \equiv 1$ ou 9 mod 10 et $b, b' \equiv 3$ ou 7 mod 10 alors $aa', bb' \equiv 1$ ou 9 mod 10 et $ab \equiv 3$ ou 7 mod 10.

Montrons d'abord l'assertion pour les puissances de nombres premiers: Clairement $f(2^k) = f(5^k)$ et $g(2^k) = g(5^k) = 0$. Si $p \equiv 1, 9 \bmod 10$ alors $f(p^k) = g(p^k) = k + 1$ et $g(p^k) = 0$. Si $p \equiv 3, 7 \bmod 10$ alors les puissances paires de p sont congrues à $1, 9 \bmod 10$ et les puissances impaires congrues à $3, 7 \bmod 10$. Ainsi on a dans tous les cas $f(p^k) \geq g(p^k)$.

Supposons maintenant que pour un certain n l'assertion est verifiée. Soit p un premier qui ne divise pas n. Si l'on arrive à montrer que $f(p^k n) \geq g(p^k n)$ on a fini. Si $p = 2, 5$ les deux termes ne changent pas. Supposons que $p \neq 2, 5$. Soit A l'ensemble des diviseurs de n avec le dernier chiffre 1 ou 9 et B l'ensemble des diviseurs de n avec le dernier chiffre 3 ou 7. Alors l'ensemble de tous les diviseurs de $p^k n$ qui se terminent par $1, 3, 7$ ou 9 est l'union disjointe des ensembles

$$A, B, pA, pB, \ldots, p^k A, p^k B.$$

Si $p \equiv 1, 9 \bmod 10$ alors

$f(p^k n) = |A| + |pA| + \ldots |p^k A| = (k+1)f(n) \geq (k+1)g(n) = |B| + |pB| + \ldots |p^k B| = g(p^k n)$.

Si $p \equiv 3, 7 \bmod 10$ alors si est $k = 2k' + 1$

$$f(p^k n) = |A| + |pB| + \ldots + |p^{k-1}A| + |p^k B| = k(g(n) + f(n))$$

et

$$g(p^k n) = |B| + |pA| + \ldots + |p^{k-1}B| + |p^k A| = k(g(n) + f(n)).$$

Si $k = 2k'$ alors

$$f(p^k n) = |A| + |pB| + \ldots + |p^{k-1}B| + |p^k A| = kg(n) + (k+1)f(n)$$

et

$$g(p^k n) = |B| + |pA| + \ldots + |p^{k-1}A| + |p^k B| = (k+1)g(n) + kf(n).$$

3. Lösung:

Zuerst zeigen wir den Fall $n = p^k$, wobei p prim ist. Für $p = 2, 5$ ist die Aussage trivial: $f(2^k) = 1 > 0 = g(2^k)$,$f(5^k) = 1 > 0 = g(5^k)$. Sei nun p verschieden von $2, 5$. Es gilt nun $p^2 \equiv \pm 1 \,\mathrm{mod}(10)$ und daher: $f(p^k) \geq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil \geq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor = k + 1 - \lceil \frac{k+1}{2} \rceil \geq g(p^k)$. Sei nun $F(n)$ die Menge aller Teiler von n, die mit einer 1 oder 9 aufhören, und $G(n)$ die Menge aller Teiler von n, die mit einer 3 oder 7 aufhören. Seien nun a, b teilerfremd für die gilt $f(a) \geq g(a)$ und $f(b) \geq g(b)$. Eine kurze Rechnung zeigt:

$$F(ab) = F(a)F(b) \dot{\cup} G(a)G(b)$$

$$G(ab) = F(a)G(b) \dot{\cup} G(a)F(b)$$

und somit

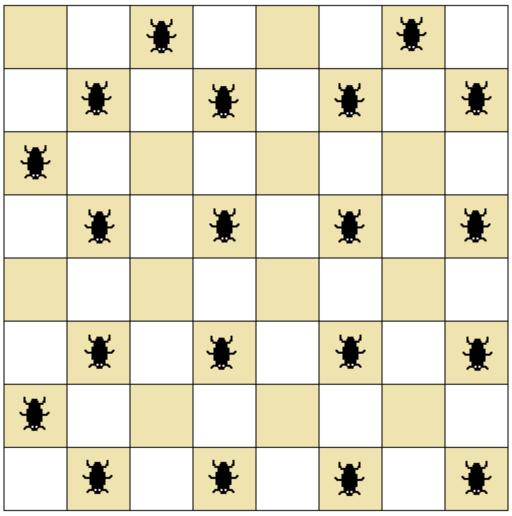
$$f(ab) - g(ab) = |F(ab)| - |G(ab)| = (f(a) - g(a))(f(b) - g(b)) \geq 0$$

Eine kleine Induktion zeigt das Gewünschte.

10. Wir führen eine Schachbrettfärbung ein. Alle Kakerlaken die auf weissen Feldern sitzen, kriechen auf schwarze Felder und umgekehrt. Da alles symmetrisch in schwarz und weiss ist, ist die maximale Anzahl freiwerdender weisser Felder gleich der maximalen Anzahl freiwerdender schwarzer Felder.

Abbildung 4 zeigt, dass die Kakerlaken so in benachbarte Felder kriechen können, sodass danach 12 schwarze Felder frei werden. Alle Kakerlaken auf den weissen Feldern kriechen auf ein mit einer Kakerlake gekennzeichnetes Feld. Dies ist möglich, da jedes weisse Feld an zwei solchen Feldern grenzt.

Abbildung 5 zeigt, dass maximal 12 schwarze Felder frei werden. Die Kreuze, T-Tetrominos und L-Triominos haben ihr Zentrum jeweils auf einem weissen Feld. Von diesen weissen



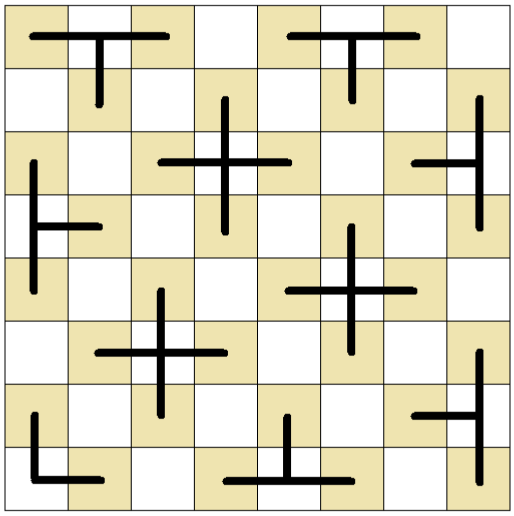


Abbildung 4: Lösung für 12 freie Felder

Abbildung 5: Färbung

Feldern kriechn 2 Kakerlaken weg. Somit bleiben bei den Kreuzen, T-Tetrominos bzw. L-Triomino maximal 2, 1 bzw. 0 schwarze Felder frei. Dies sind insgesamt maximal 12.

Also werden maximal 12 weisse und 12 schwarze, also 24 Felder frei. Wie schon gezeigt können auch 24 Felder frei werden.