

Lösungen zur Vorrundenprüfung 2010

Zuerst einige Bemerkungen zum Punkteschema. Eine vollständige und korrekte Lösung einer Aufgabe ist jeweils 7 Punkte wert. Für komplette Lösungen mit kleineren Fehlern oder Ungenauigkeiten, die aber keinen wesentlichen Einfluss auf die Richtigkeit der dargestellten Lösung haben, geben wir 6 Punkte. Bei unvollständigen Lösungen wird der Fortschritt und der Erkenntnisgewinn bewertet (Teilpunkte). Oft gibt es mehrere Lösungen für ein Problem. Versucht jemand zum Beispiel eine Aufgabe auf zwei verschiedenen Wegen zu lösen, erreicht auf dem ersten Weg 3 Punkte, auf dem zweiten 2 Punkte, dann wird seine Punktzahl nicht 5, sondern 3 sein. Punkte, die auf verschiedenen Wegen erreicht werden, sind also *nicht* kumulierbar. Die unten angegebenen Bewertungsschemata sind nur Orientierungshilfe. Gibt jemand eine alternative Lösung, dann werden wir versuchen, die Punktzahl entsprechend zu wählen, dass für gleiche Leistung gleich viele Punkte verteilt werden. Die Schemata sind stets wie folgt zu interpretieren:

Kommt jemand in seiner Lösung bis und mit hierhin, dann gibt das so viele Punkte. Ausnahmen von dieser Regel sind jeweils ausdrücklich deklariert.

1. Bestimme alle Lösungen in natürlichen Zahlen der Gleichung

$$ab + bc + ca = 2(a + b + c).$$

1. Lösung:

Wir können aus Symmetriegründen $a \leq b \leq c$ annehmen. Sei zuerst $a \geq 2$. Dann erhält man für die linke Seite die Abschätzung

$$ab + bc + ca \geq 2a + 2b + 2c,$$

nach Voraussetzung gilt hier aber Gleichheit, also muss $a = b = c = 2$ sein. Dies ist tatsächlich eine Lösung. Sei im Folgenden also $a = 1$, die Gleichung wird dann zu

$$bc = b + c + 2.$$

Gilt hier $b \geq 3$, dann ist $bc \geq 3c \geq b + c + 3$, ein Widerspruch. Folglich ist $b = 1$ oder $b = 2$. Der erste Fall führt zu keiner Lösung, der zweite zu $c = 4$. Die Lösungen sind also die Vertauschungen der Tripel

$$(2, 2, 2) \quad \text{und} \quad (1, 2, 4).$$

2. Lösung:

Die Gleichung lässt sich umschreiben zu

$$(a-1)(b-1) + (b-1)(c-1) + (c-1)(a-1) = 3.$$

Mit $x = a - 1, y = b - 1, z = c - 1$ ist sie also äquivalent zu $xy + yz + zx = 3$, wobei $x, y, z \geq 0$. Sind x, y, z alle positiv, dann gilt $xy + yz + zx \geq 3$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x = y = z = 1$. In allen anderen Fällen ist mindestens eine der drei Variablen gleich 0, wir können $x = 0$ annehmen. Dann gilt $yz = 3$ und somit bis auf Vertauschung $y = 1$ und $z = 3$. Die Lösungstriplet (x, y, z) sind also die Vertauschungen der Tripel $(1, 1, 1)$ und $(0, 1, 3)$. Dies führt zu denselben Lösungen wie vorher.

Bemerkungen und Punkteschema:

Für die *erste Lösung*: Für den Fall $a, b, c \geq 2$ gab es 3P. Die nachfolgende (!) Behandlung des Falles $a = 1$ gab insgesamt 4P. Dabei gab es Teilpunkte je nach Fortschritt. Die Faktorisierung $(b-1)(c-1) = 3$ war 2P wert.

Für die *zweite Lösung*: Die Faktorisierung und Einführung der Gleichung $xy + yz + zx = 3$ war 2P wert. Der Fall $x, y, z \geq 1$ gab weitere 2 Punkte und der danach (!) behandelte Fall $x = 0$ gab weitere 3P.

Eine Analyse „kleiner“ Fälle, also zum Beispiel dem Fall $a = 1$, ohne vorher eine grundlegende Einschränkung an die Grösse mindestens einer der Variablen zu erhalten, gab höchstens 2P.

Ein sinnvoller Ansatz, Abschätzungen zu verwenden, und der Versuch zu zeigen, dass nicht alle drei Variablen gleichzeitig gross sein können, gab einen Teilpunkt. Wurde dabei irgendeine konkrete Schranke bewiesen (zum Beispiel, dass a, b, c nicht alle ≥ 5 sein können) gab es 2 Teilpunkte.

2. Sei g eine Gerade in der Ebene. Die Kreise k_1 und k_2 liegen auf derselben Seite von g und berühren g in den Punkten A respektive B . Ein weiterer Kreis k_3 berühre k_1 in D und k_2 in C . Beweise dass gilt:
- (a) Das Viereck $ABCD$ ist ein Sehnenviereck.
 - (b) Die Geraden BC und AD schneiden sich auf k_3 .

1. Lösung:

- (a) Seien M_1, M_2 und M_3 die Mittelpunkte von k_1, k_2 und k_3 . Die Strecken AM_1 und BM_2 stehen dann senkrecht auf g und die Punkte M_1, D und M_3 liegen auf einer Geraden. Weiter sei $\angle DAB = \alpha$ und $\angle CBA = \beta$. Durch Winkeljagd erhält man $\angle M_3DA = 180^\circ - \angle M_1DA = 180^\circ - \angle M_1AD = 180^\circ - (90^\circ - \angle DAB) = 90^\circ + \alpha$.

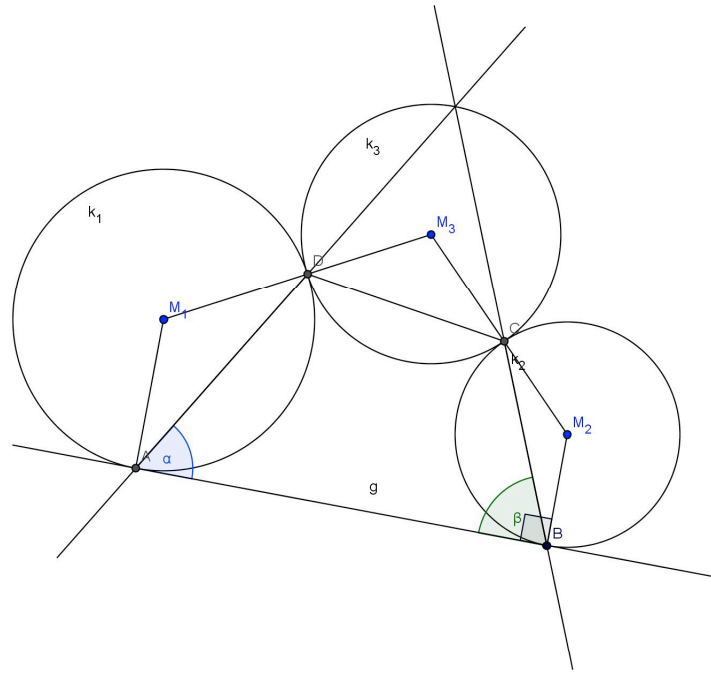


Abbildung 1: Zu Aufgabe 2

Analog gilt $\angle M_3CB = 90^\circ + \beta$. Die Innenwinkelsumme in einem Fünfeck beträgt 540° . Folglich gilt

$$\angle DM_3C = 540^\circ - \alpha - \beta - (90^\circ + \alpha) - (90^\circ + \beta) = 360^\circ - 2\alpha - 2\beta.$$

Nun gilt weiter

$$\angle M_3DC = (180^\circ - \angle DM_3C)/2 = \alpha + \beta - 90^\circ.$$

Also ist

$$\angle ADC = (90^\circ + \alpha) - (\alpha + \beta - 90^\circ) = 180^\circ - \beta.$$

Da nun die zwei gegenüberliegenden Winkel $\angle ABC$ und $\angle CDA$ zusammen 180° ergeben ist $ABCD$ ein Sehnenviereck.

(b) Sei E der Schnittpunkt von AD mit BC . Es gilt

$$\angle AEB = 180^\circ - \alpha - \beta = (\angle DM_3C)/2.$$

Da der Winkel $\angle AEB$ gerade halb so gross ist wie der Winkel $\angle DM_3C$ liegt E nach der Umkehrung des Zentriwinkelsatzes auf k_3 .

2. Lösung:

- (a) Seien c und d die gemeinsamen Tangenten von k_3 mit k_2 bzw. k_1 durch den Punkt C bzw. D . Zudem sei $\angle DAB = \alpha$ und $\angle CBA = \beta$. Der Winkel zwischen d und CD sei γ . Dann ist aus Symmetriegründen der Winkel zwischen d und AD gleich α , der Winkel zwischen c und BC gleich β und der Winkel zwischen c und CD gleich γ . Wegen der Innenwinkelsumme im Viereck $ABCD$ gilt

$$360^\circ = \alpha + (\alpha + \gamma) + (\gamma + \beta) + \beta = 2(\alpha + \beta + \gamma).$$

Folglich ist $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Das Viereck $ABCD$ ist ein Sehnenviereck genau dann wenn zwei gegenüberliegende Winkel 180° ergeben. Wie gewünscht gilt

$$\angle ABC = \angle CDA = \beta + (\alpha + \gamma) = 180^\circ.$$

- (b) Sei E der Schnittpunkt von AD mit BC . Nach dem Tangentenwinkelsatz ist der Peripheriewinkel über der Strecke CD gleich dem Tangentenwinkel γ . Da $\angle DEC = \angle AEB = 180^\circ - \alpha - \beta = \gamma$ liegt E auf k_3 .

3. Lösung:

- (b) Seien M_1 , M_2 und M_3 die Mittelpunkte von k_1 , k_2 und k_3 . Sei X der Punkt auf k_3 so dass M_3X senkrecht auf g liegt und M_3X in die entgegengesetzte Richtung zeigt wie M_1A . Durch eine Punktstreckung am Punkt D geht der Kreis k_1 in den Kreis k_3 über und A in X . Folglich schneidet die Gerade AD den Kreis k_3 bei X . Analog schneidet die Gerade BC den Kreis k_3 in X . Folglich schneiden sich die Geraden AD und BC auf k_3 , nämlich bei X .
- (a) Sei Y der zweite Schnittpunkt von M_3X mit k_3 und Z der Schnittpunkt von M_3X mit g . Da XY ein Durchmesser von k_3 ist gilt $\angle YDX = 90^\circ$. Daraus folgt wiederum $\angle ADY = 90^\circ$. Das Viereck $AZYD$ ist also ein Sehnenviereck. Folglich gilt

$$\angle DAB = \angle DYX = \angle DCX = 180^\circ - \angle BCD.$$

Also gilt $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$ woraus folgt, dass $ABCD$ ein Sehnenviereck ist.

Bemerkungen und Punkteschema:

Für Teil (a) gab es 5 und für Teil (b) 2 Punkte. Wenn man Teilaufgabe (a) nicht gelöst hat, gab es je einen Punkt für folgende Schritte:

- Einführen der Mittelpunkte M_1 , M_2 und M_3 der Kreise k_1 , k_2 und k_3 und bei der Winkeljagd verwenden, dass zum Beispiel M_1 , D und M_3 auf einer Geraden liegen.

- Benützen, dass M_1A (oder M_2B) senkrecht zu g steht, und dass AM_1D ein gleichschenkliges Dreieck ist. Diesen Punkt bekam man auch, wenn man die gemeinsame Tangente von k_1 und k_3 durch D einführte und merkte, dass der Winkel zwischen dieser Tangente und AD gleich gross ist wie der Winkel zwischen g und AD .
 - Durch Betrachten der Innenwinkelsumme im Viereck $ABCD$ oder im Fünfeck $ABCM_3D$ wichtige Informationen über die Winkel erhalten.
 - Feststellen, dass es genügt zu zeigen, dass $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$ oder $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$ ist. Man musste aber auch versuchen, dies mit Winkeljagd zu beweisen um den Punkt zu erhalten.
3. Auf wieviele Arten kann man jeder Ecke eines Würfels eine der Zahlen $1, 2, 3, \dots, 10$ zuordnen, sodass keine Zahl mehrfach verwendet wird, und so dass für jede Seitenfläche die Summe der Zahlen in den vier angrenzenden Ecken ungerade ist?

Lösung:

Wir nennen diese Summen von vier Zahlen in den Ecken einer Seitenfläche kurz *Flächensummen*. Ob eine Flächensumme ungerade ist oder nicht, hängt nur davon ab, wie viele der Zahlen in den Ecken ungerade sind. Für jede Fläche müssen also entweder 1 oder 3 angrenzende Eckzahlen ungerade sein.

Fixiere nun den Würfel und betrachte ein Paar gegenüberliegender Seitenflächen. Besitzen beide Flächen nur eine angrenzende ungerade Eckenzahl, dann müssen insgesamt 6 Eckenzahlen gerade sein, im Widerspruch dazu, dass unter den Zahlen $1, 2, \dots, 10$ nur fünf gerade sind. Besitzen beide Flächen drei angrenzende ungerade Eckenzahlen, dann müssen insgesamt 6 Eckenzahlen ungerade sein, wieder ein Widerspruch. Durchtesten der verbleibenden vier Fälle zeigt, dass die Anordnung der vier ungeraden Eckenzahlen wie folgt aussieht: Eine Ecke und die drei angrenzenden Ecken tragen ungerade Zahlen, der Rest gerade Zahlen.

Es gibt nun 8 Möglichkeiten, die zentrale ungerade Ecke zu wählen. Anschliessend lassen sich den vier ungeraden Ecken auf $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ Arten paarweise verschiedene Zahlen aus der Menge $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ zuordnen. Den vier geraden Ecken ebenfalls auf $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ Arten paarweise verschiedene Zahlen aus der Menge $\{2, 4, 6, 8, 10\}$. Die gesuchte Anzahl Zuordnungen ist also gleich

$$8 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)^2 = 115200.$$

Bemerkungen und Punkteschema:

Der Beweis, dass genau vier Zahlen ungerade sind und wie oben beschrieben angeordnet sind, war 4P wert. Je einen Teilpunkt gab es für das Ausschliessen der Fälle mit 2 respektive 6 ungeraden Zahlen. Wurde die richtige Anordnung zwar gefunden aber nicht begründet, gab es in jedem Fall mindestens 1P.

Das Zählen der möglichen Verteilungen der Zahlen entsprechend dem gerade/ungerade Muster war 3P wert. Dabei gab es jeweils 1P Abzug für jeden der folgenden Fehler:

- Drehungen des Würfels falsch gezählt, üblicherweise resultierte das im Fehlen des Faktors 8.
- Verteilung der geraden Zahlen (oder der ungeraden oder beides) falsch gezählt. Zum Beispiel $\binom{5}{4}$ oder 5^4 statt $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$.

Einige Leute haben bei der Aufgabe angenommen, dass der Würfel nicht fixiert ist, sondern gedreht werden darf. Das obige Resultat ist dann durch 24 zu teilen. Für eine korrekte Lösung dieser modifizierten Aufgabe wurden keine Punkte abgezogen.

4. Finde alle Paare (u, v) natürlicher Zahlen, sodass

$$\frac{uv^3}{u^2 + v^2}$$

eine Primpotenz ist.

Lösung:

Sei p^n diese Primpotenz, Umformen liefert die äquivalente Gleichung $uv^3 = p^n(u^2 + v^2)$. Setze $d = \text{ggT}(u, v)$ und schreibe $u = dx$, $v = dy$, dann sind x und y teilerfremd. Die Gleichung wird zu

$$d^2xy^3 = p^n(x^2 + y^2).$$

Nun ist xy^3 teilerfremd zu $x^2 + y^2$, denn jeder gemeinsame Primteiler von zum Beispiel x und $x^2 + y^2$ teilt auch y^2 und damit y , im Widerspruch zur Teilerfremdheit von x und y . Folglich ist xy^3 ein Teiler von p^n , also sind x und y beides p -Potenzen. Ausserdem muss wegen der Teilerfremdheit mindestens eine dieser beiden Zahlen gleich 1 sein. Wir unterscheiden nun drei Fälle:

- Sei $x = y = 1$. Dann gilt $d^2 = 2p^n$, somit ist die linke Seite durch 4 teilbar und damit $p = 2$. Ausserdem ist $n = 2k - 1$ ungerade. Dies liefert $u = v = d = 2^k$ mit $k \geq 1$. Dies sind tatsächlich Lösungen.
- Sei $x = p^r$ mit $1 \leq r \leq n$ und $y = 1$. Dann gilt $d^2 = p^{n-r}(p^{2r} + 1)$. Hier sind die beiden Faktoren rechts wegen $r \geq 1$ teilerfremd und damit sind beide Quadrate. Ein Widerspruch, denn der zweite Faktor liegt wegen $(p^r)^2 < p^{2r} + 1 < (p^r + 1)^2$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadraten, kann also nicht selbst eines sein.
- Der Fall $x = 1$ und $y = p^s$ mit $1 \leq s \leq n/3$ führt genauso zu einem Widerspruch.

Die gesuchten Paare sind also

$$(u, v) = (2^k, 2^k) \quad \text{mit} \quad r \geq 1.$$

Bemerkungen und Punkteschema:

Das Punkteschema besteht aus zwei Teilen. Die Vorbereitungen waren insgesamt 3P wert, die Fallunterscheidung und der Beweisabschluss 4P. Bei den Vorbereitungen gaben die folgenden Schritte in dieser Reihenfolge jeweils einen Punkt:

- Die Einführung von $d = \text{ggT}(u, v)$ und die Zerlegungen $u = dx$ und $v = dy$.
- xy^3 und $x^2 + y^2$ sind teilerfremd.
- x und y sind beides p -Potenzen.

Bei der Fallunterscheidung wurden Punkte wie folgt verteilt:

- $x = y = 1$ 1P.
- Für einen der beiden Fälle $x = p^r$, $y = 1$ oder $x = 1$, $y = p^s$ gab es 2P
- Die Behandlung des anderen (völlig analogen) Falls und der Beweisabschluss waren insgesamt 1P wert.

5. Ein Schweizerkreuz besteht aus fünf Einheitsquadraten, einem zentralen und vier seitlich angrenzenden. Bestimme die kleinste natürliche Zahl n mit folgender Eigenschaft: Unter je n Punkten im Innern oder auf dem Rand eines Schweizerkreuzes gibt es stets zwei, deren Abstand kleiner als 1 ist.

Lösung:

Die Menge aller Eckpunkte der fünf Einheitsquadrate ist ein Beispiel einer Menge von 12 Punkten, deren paarweise Abstände alle mindestens gleich 1 sind. Folglich ist $n \geq 13$. Wir zeigen nun, dass unter 13 Punkten tatsächlich stets zwei einen Abstand < 1 haben. Unterteile dazu das Schweizerkreuz in 12 Teilgebiete wie in Abbildung 2.

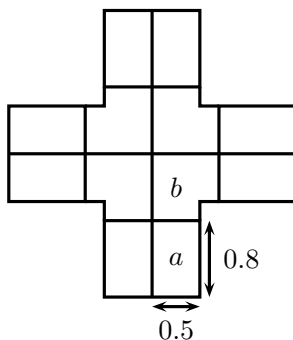


Abbildung 2: Die 12 Gebiete

Die acht Gebiete der Form a sind Rechtecke der Grösse $0,5 \times 0,8$. Liegen zwei Punkte P, Q in oder auf dem Rand eines solchen Rechtecks, dann ist ihr Abstand nach dem Satz von Pythagoras höchstens

$$|PQ| \leq \sqrt{0,5^2 + 0,8^2} = \sqrt{0,89} < 1.$$

Die vier Gebiete der Form b sind jeweils Teil eines Quadrats der Seitenlänge $0,7$. Zwei Punkte P, Q in oder auf dem Rand eines solchen Gebietes haben dann wiederum einen Abstand von höchstens

$$|PQ| \leq \sqrt{0,7^2 + 0,7^2} = \sqrt{0,98} < 1.$$

Nach dem Schubfachprinzip liegen nun zwei der 13 Punkte im oder auf dem Rand desselben Gebietes, haben also einen Abstand < 1 .

Bemerkungen und Punkteschema:

Ein Beispiel von 12 Punkten, die paarweise Abstand ≥ 1 haben, ist 1P wert. Der Beweis für $n \leq 13$ gab 6P. Für einen sinnvollen (aber erfolglosen) Versuch, das Schweizerkreuz in 12 Gebiete mit Durchmesser < 1 zu unterteilen, vergaben wir einen Teilpunkt.