IMO Selektion 2010 Lösungen

1. Sei $\pi = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Die *Verwuselung* von π ist die Anzahl Paare (i, j) natürlicher Zahlen mit $1 \leq i < j \leq n$ und $a_j > a_i$. Beweise, dass es für jede ganze Zahl k mit $0 \leq k \leq \binom{n}{2}$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ mit Verwuselung k gibt.

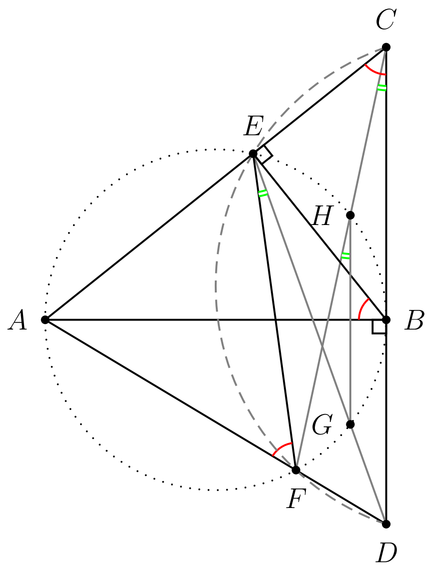
1. Lösung

Wir verwenden Induktion nach n, der Fall $n = 1$ ist trivial.

- Sei $0 \leq k \leq \binom{n-1}{2}$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine Permutation $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ mit Verwuselung k. Setzt man nun $a_n = n$, dann besitzt die Permutation $(a_1, \ldots, a_n)$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ ebenfalls die Verwuselung k, wie gewünscht.
- Sei nun $\binom{n-1}{2} + 1 \leq k \leq \binom{n}{2}$. Es gilt $\binom{n-1}{2} + 1 \geq n - 1$ und daher gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Permutation $(a_2, \ldots, a_n)$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ mit Verwuselung $k - (n-1) \geq 0$. Setzt man nun $a_1 = n$, dann besitzt die Permutation $(a_1, \ldots, a_n)$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ die Verwuselung k.

2. Sei AB ein Durchmesser des Kreises k. Sei t die Tangente an k im Punkt B und seien C, D zwei Punkte auf t, sodass B zwischen C und D liegt. Die Geraden AC bzw. AD schneiden k nochmals in den Punkten E bzw. F. Die Geraden DE bzw. CF schneiden k nochmals in den Punkten G bzw. H. Beweise, dass die Strecken AG und AH dieselbe Länge haben.

Lösung



Es genügt zu zeigen, dass $HG \parallel CD$ ist, denn daraus folgt, dass $\triangle GAH$ gleichschenklig in A ist. Es gilt $\angle AEB = 90° = \angle ABC$, wobei die erste Gleichheit wegen dem Satz von Thales folgt, die zweite weil t eine Tangente ist. Somit ist $\triangle ABC \sim \triangle AEB$ und daher $\angle ACB = \angle ABE$. Mit dem Peripheriewinkelsatz folgt weiter $\angle ABE = \angle AFE$, also insgesamt $\angle ACB = \angle AFE$ und $CEFD$ ist ein Sehnenviereck. Wiederum mit dem Peripheriewinkelsatz erhält man schliesslich $\angle FCD = \angle FED = \angle FHD$, also $HG \parallel CD$.

3. Eine natürliche Zahl x heisst *gut*, falls x das Produkt einer geraden Anzahl (nicht notwendig verschiedener) Primzahlen ist. Seien a, b natürliche Zahlen und definiere $m(x) = (x + a)(x + b)$.

(a) Beweise, dass natürliche Zahlen a, b existieren, sodass $m(1), m(2), \ldots, m(2010)$ alles gute Zahlen sind.

(b) Ist $m(x)$ für jede natürliche Zahl x gut, dann gilt $a = b$.

1. Lösung

Für eine natürliche Zahl x setzen wir $u(x) = 0$ falls x gut ist und $u(x) = 1$ sonst. Es gilt dann offensichtlich $u(xy) \equiv u(x) + u(y) \pmod 2$.

(a) In der binären Folge
$$v = \big(u(2), u(3), u(4), \ldots\big)$$
betrachte man die ersten $n = 2^{2010} + 1$ Teilfolgen der Länge 2010, d.h. die Teilfolgen $v_a = (u(a + 1), \ldots, u(a + 2010))$ für $1 \leq a \leq n$. Nach dem Schubfachprinzip existieren $1 \leq a < b \leq n$ mit $v_a = v_b$. Für diese Wahl von a und b sind die Zahlen $m(1), \ldots, m(2010)$ alle gut.

(b) Wir führen $a < b$ zu einem Widerspruch. Nach Annahme stimmen die beiden unendlichen Teilfolgen $(u(a + 1), u(a + 2), \ldots)$ und $(u(b + 1), u(b + 2), \ldots)$ von v überein. Dies bedeutet aber, dass v ab der $(a + 1)$-ten Stelle periodisch ist mit Periode $p = b - a > 0$. Andererseits können wir ein Vielfaches $kp \geq a + 1$ von p wählen und erhalten $u(kp) \neq u(2kp)$, im Widerspruch zur Periodizität von v.

2. Lösung

Wir geben ein alternatives Argument für (b) und führen die Annahme $a > b$ zu einem Widerspruch. Wir behaupten, dass unendlich viele natürliche Zahlen n existieren, sodass $n(n + 1)$ nicht gut ist. Sonst wäre nämlich $u(n)$ konstant für grosse n. Das Widerspricht aber der Existenz unendlich vieler Primzahlen (für die u den Wert 1 annimmt) und der Existenz unendlich vieler Quadratzahlen (für die u den Wert 0 annimmt). Wähle nun eine natürliche Zahl n mit $\frac{a}{b} > \frac{n+1}{n}$ und sodass $u(n(n+1)) = 1$ gilt. Nach Annahme ist

$$m\big(na - (n + 1)b\big) = \big((n + 1)a - (n + 1)b\big)(na - nb) = n(n + 1)(a - b)^2$$

gut, also auch $n(n + 1)$, Widerspruch.

4. Die Punkte X, Y, Z liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden mit $|XY| \neq |YZ|$. Sei k_1 bzw. k_2 der Kreis mit Durchmesser XY bzw. YZ. Die Punkte A_1 und B_1 bzw. A_2 und B_2 liegen auf k_1 bzw. k_2, sodass

$$\angle A_1YA_2 = \angle B_1YB_2 = 90^\circ$$

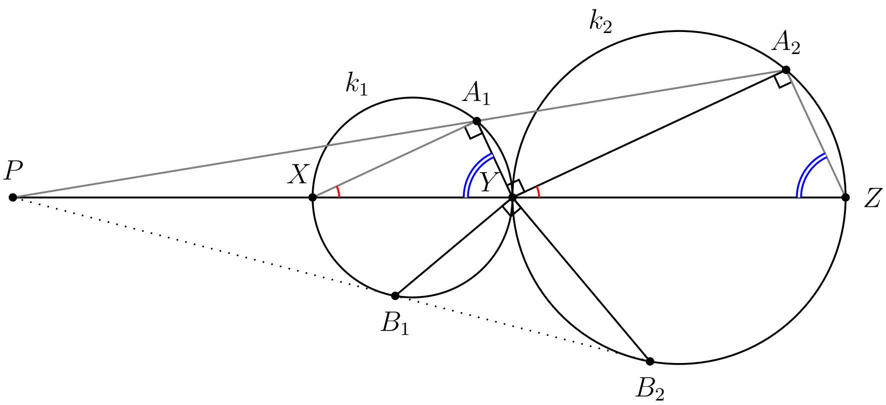
gilt. Zeige, dass sich die beiden Geraden A_1A_2 und B_1B_2 auf XY schneiden.

1. Lösung

Es gilt $\angle A_2ZY = 90^\circ - \angle A_2YZ = \angle A_1YX$ und analog $\angle A_1XY = A_2YZ$. Also ist $\triangle A_1XY \sim \triangle A_2YZ$. Definiere P als Schnittpunkt von A_1A_2 und XY. Dann gilt $\triangle PA_1Y \sim PA_2Z$ und wir erhalten die Streckenverhältnisse $\frac{PZ}{PY} = \frac{ZA_2}{YA_1}$ und $\frac{ZA_2}{YA_1} = \frac{ZY}{YX}$ also insgesammt

$$\frac{PZ}{PY} = \frac{ZY}{YX}. \tag{1}$$

Diese Gleichung ist allerdings von zwei verschiedenen Punkten P auf XY erfüllt, einer liegt im Inneren von k_2 und einer ausserhalb. Die Situation sei oBdA wie in der Skizze, wobei wir annehmen, dass P im Innern von k_2 liegt. In diesem Fall hat man die Abschätzung $\angle A_1YX > \angle A_1PY > \angle A_2ZY$ im Widerspruch zur ersten Zeile des Beweises. Folglich liegt P ausserhalb von k_2 und ist somit durch (1) eindeutig bestimmt und unabhängig von A_1 und A_2.



2. Lösung

Da die Kreise k_1 und k_2 verschiedene Radien haben, gibt es eine Streckung S mit positivem Streckfaktor und Zentrum P, welche k_1 in k_2 überführt. Dabei liegt P offensichtlich auf der Geraden XY. Es gilt $\angle A_2ZY = 90^\circ - \angle A_2YZ = \angle A_1YX$ und analog $\angle A_1XY = A_2YZ$. Also ist $\triangle A_1XY \sim \triangle A_2YZ$ und die Geraden A_2Z und A_1Y sind parallel. Daher gilt $S(A_1) = A_2$ und die Punkte P, A_1 und A_2 sind kollinear. Dasselbe Argument zeigt, dass die drei Punkte P, B_1 and B_2 kollinear sind, folglich schneiden sich A_1A_2 und B_1B_2 in P.

5. Sei P eine endliche Menge von Primzahlen und sei $\ell(P)$ die grösstmögliche Anzahl aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, sodass jede dieser Zahlen durch mindestens eine Primzahl aus P teilbar ist. Beweise die Ungleichung $\ell(P) \geq |P|$ und zeige, dass genau dann Gleichheit gilt, wenn das kleinste Element von P grösser ist als $|P|$.

Lösung

Sei $|P| = n$ und $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Wir nehmen zuerst an, dass $p_k > n$ gilt für alle k, und zeigen, dass keine $n+1$ aufeinanderfolgende Zahlen existieren können, die alle durch ein Element von P teilbar sind. Nach dem Schubfachprinzip müssten dann nämlich zwei dieser Zahlen durch dieselbe Primzahl p_k teilbar sein. Diese zwei Zahlen haben aber höchstens Differenz n, im Widerspruch zu $p_k > n$.

Wir konstruieren nun n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die alle durch eine Primzahl aus P teilbar sind, dies zeigt $\ell(P) \geq |P|$. Betrachte dazu das System von n Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &\equiv -1 \qquad \pmod{p_1} \\ x &\equiv -2 \qquad \pmod{p_2} \\ &\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ x &\equiv -n \qquad \pmod{p_n} \end{aligned}$$

Da die Moduli paarweise teilerfremd sind, besitzt dieses System nach dem chinesischen Restsatz eine Lösung $x > 0$. Nach Konstruktion ist $x + k$ durch p_k teilbar und daher besitzen die n aufeinanderfolgenden Zahlen $x+1, \ldots, x+n$ die gewünschte Eigenschaft.

Sei schliesslich $m = \min\{p_1, \ldots, p_n\} \leq n$, nach Umordnen der Elemente von P können wir oBdA $p_m = m$ annehmen. Dann ist in obiger Konstruktion aber zusätzlich x durch p_m teilbar, dies zeigt $\ell(P) > |P|$.

6. Finde alle positiven reellen Lösungen (a, b, c, d) der Gleichung

$$\frac{a^2 - bd}{b + 2c + d} + \frac{b^2 - ca}{c + 2d + a} + \frac{c^2 - db}{d + 2a + b} + \frac{d^2 - ac}{a + 2b + c} = 0.$$

1. Lösung

Die gesuchten Lösungen (a, b, c, d) sind genau diejenigen mit $a = c$ und $b = d$. Sei A die linke Seite der Gleichung, wir werden beweisen, dass für alle $a, b, c, d > 0$ die Ungleichung $A \geq 0$ gilt mit Gleichheit genau dann, wenn $a = c$ und $b = d$. Dass dies wirklich Gleichungsfälle sind, ist leicht zu sehen. Die gewünschte Abschätzung ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} A = \sum_{cyc} \frac{a^2 - bd}{b + 2c + d} &\overset{(i)}{\geq} \sum_{cyc} \frac{c^2 - bd}{b + 2c + d} = \sum_{cyc} \frac{(b+c)^2}{b + 2c + d} - b \\ &\overset{(ii)}{\geq} \frac{4(a+b+c+d)^2}{4(a+b+c+d)} - (a+b+c+d) = 0. \end{aligned}$$

Dabei haben wir bei (i) die Umordnungsungleichung für die gleichgeordneten Folgen

$$(a^2 - bd, c^2 - db) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{b + 2c + d}, \frac{1}{d + 2a + b}\right)$$

respektive

$$(b^2 - ca, d^2 - ac) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{c + 2d + a}, \frac{1}{a + 2b + c}\right)$$

verwendet, Gleichheit gilt dabei genau für $a = c$ respektive $b = d$. Die Abschätzung (ii) folgt aus CS.

2. Lösung

Wir zeigen die Abschätzung

$$\frac{a^2 - bd}{b + 2c + d} + \frac{c^2 - db}{d + 2a + b} \geq \frac{a - b + c - d}{2} \tag{2}$$

mit Gleichheit nur dann, wenn $a = c$ (und $b = d$). Zusammen mit der analogen Ungleichung für die Summe der beiden anderen Terme ergibt dies das Gewünschte. Eine kurze Rechnung zeigt

$$\frac{a^2 - bd}{b + 2c + d} + b = \frac{(a^2 - c^2) + (b + c)^2}{b + 2c + d}.$$

Ausserdem gilt die Abschätzung

$$(a^2 - c^2)\Big(\frac{1}{b + 2c + d} - \frac{1}{d + 2a + b}\Big) = \frac{2(a - c)^2(a + c)}{(b + 2c + d)(d + 2a + b)} \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a = c$. Damit und mit CS erhält man nun

$$\begin{aligned}
\frac{a^2 - bd}{b + 2c + d} + \frac{c^2 - db}{d + 2a + b} + b + d &\geq \frac{(b + c)^2}{b + 2c + d} + \frac{(d + a)^2}{d + 2a + b} \\
&\geq \frac{\big((b + c) + (d + a)\big)^2}{(b + 2c + d) + (d + 2a + b)} \\
&= \frac{a + b + c + d}{2},
\end{aligned}$$

und dies ist genau (2).

3. Lösung

Wir setzen $s = a + b + c + d$ und erhalten

$$A = \frac{s(a^2 + c^2 - 2bd) + (a - c)^2(a + c)}{s^2 - (a - c)^2} + \frac{s(b^2 + d^2 - 2ac) + (b - d)^2(b + d)}{s^2 - (b - d)^2} = 0.$$

Multipliziert man hier die Nenner hoch, erhält man die äquivalente Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= s^3\big((a - c)^2 + (b - d)^2\big) \\
&+ s^2\big((a - c)^2(a + c) + (b - d)^2(b + d)\big) \\
&- s\big((b - d)^2(a^2 + c^2 - 2bd) + (a - c)^2(b^2 + d^2 - 2ac)\big) \\
&- (b - d)^2(a - c)^2(\underbrace{a + b + c + d}_{s}).
\end{aligned}$$

Hier kann man nun mit $s > 0$ kürzen und erhält nach umordnen

$$\begin{aligned}
0 &= s^2\big((a - c)^2 + (b - d)^2\big) \\
&+ s\big((a - c)^2(a + c) + (b - d)^2(b + d)\big) \\
&- (b - d)^2\big(a^2 + c^2 - 2bd - \tfrac{1}{2}(a - c)^2\big) \\
&- (a - c)^2\big(b^2 + d^2 - 2ac - \tfrac{1}{2}(b - d)^2\big).
\end{aligned}$$

Nochmaliges umordnen liefert schliesslich die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= (a-c)^2\big(s^2+s(a+c)-\tfrac{1}{2}(b+d)^2+2ac\big) \\ &+ (b-d)^2\big(s^2+s(b+d)-\tfrac{1}{2}(a+c)^2+2bd\big). \end{aligned}$$

Die beiden grossen Klammern sind nun aber positiv wegen $s > a + c$ und $s > b + d$. Dies beweist, dass die Gleichung genau dann erfüllt ist, wenn die Faktoren $(a-c)$ und $(b-d)$ beide verschwinden.

7. In einem Land gibt es endlich viele Städte und endlich viele Strassen. Jede Strasse verbindet zwei verschiedene Städte und je zwei Städte sind durch höchstens eine Strasse verbunden. Alle Strassen können in beide Richtungen befahren werden und das Strassennetz ist so eingerichtet, dass man jede Stadt von jeder anderen Stadt aus (möglicherweise über Umwege) erreichen kann. Für jede Stadt gibt es zudem eine gerade Anzahl Strassen, die von dieser Stadt wegführen.

Die Regierung beschliesst nun, sämtliche Strassen zu Einbahnstrassen umzubauen. Dies soll so geschehen, dass für jede Stadt die Anzahl herausführender Strassen gleich gross ist wie die Anzahl hineinführender Strassen.

(a) Zeige, dass dies stets möglich ist.

(b) Zeige, dass man immer noch jede Stadt von jeder anderen aus erreichen kann, egal wie die Regierung ihren Plan umsetzt.

1. Lösung

Die Aufgabe lässt sich in naheliegender Weise graphentheoretisch umformulieren: Die Städte und Strassen bilden die Ecken und Kanten eines endlichen Graphen G (ohne Schlingen und Mehrfachkanten). Nach Voraussetzung ist G zusammenhängend und jede Ecke besitzt gerade Ordnung.

Wir verwenden das folgende Resultat. Ein *geschlossener Eulerweg* in einem (gerichteten) Graphen ist ein geschlossener (gerichteter) Kantenzug, der jede Kante genau einmal enthält.

Lemma 1. *Ist G ein endlicher zusammenhängender Graph, in dem jede Ecke gerade Ordnung hat, dann besitzt G einen geschlossenen Eulerweg. Ist G ein gerichteter Graph, dessen unterliegender ungerichteter Graph zusammenhängend ist, und in dem jede Ecke gleich viele eingehende wie ausgehende Kanten hat, dann besitzt G einen geschlossenen Eulerweg.*

Beweis. Wir beweisen bloss die zweite Aussage. Die erste folgt genauso, man kann jedoch im Argument alle Kantenrichtungen ignorieren. Wähle einen gerichteten Kantenzug

$$W \qquad v_0e_1v_1e_2\cdots e_nv_n,$$

in G, in welchem keine Kante mehrfach vorkommt, und der maximal mögliche Länge hat (dabei ist e_k eine gerichtetet Kante von v_{k-1} nach v_k). Wegen der Maximalität liegt jede von v_n ausgehende Kante von G bereits auf W. Eine davon muss zudem gleich e_1 sein, denn sonst gäbe es mehr eingehende als ausgehende Kanten bei v_n im Widerspruch zur Annahme. Folglich gilt $v_0 = v_n$ und W ist geschlossen. Nehme an, es gäbe eine Kante e' von G, die nicht auf W liegt. Da der unterliegende ungerichtete Graph von G zusammenhängend ist, existiert ein ungerichteter Kantenzug, der von einer Ecke in W ausgeht und e' enthält. Indem wir e' ersetzen durch die erste Kante dieses Wegs, welche nicht auf W liegt, können wir annehmen, dass e' mit einer Ecke v_k von W inzident ist. Je nach Orientierung von e' lässt sich W nun aber orientiert verlängern durch

$$v_k e_k \cdots e_n v_n e_1 \cdots e_{k-1} v_k e' v' \qquad \text{oder} \qquad v' e' v_k e_k \cdots e_n v_n e_1 \cdots e_{k-1} v_k$$

(dabei ist v' die zweite Ecke von e'), im Widerspruch zur Maximalität von W. Also ist W ein geschlossener Eulerweg. $\square$

(a) Nach dem Lemma besitzt G einen geschlossenen Eulerweg. Orientiert man nun alle Kanten in dieselbe Richtung längs dieses Weges, dann erfüllt der so erhaltene gerichtete Graph offensichtlich die Bedingung der Aufgabe.

(b) Der gerichtete Einbahnstrassengraph erfüllt die Voraussetzungen des Lemmas, also existiert ein geschlossener Eulerweg. Längs diesem Weg lässt sich nun jede Ecke von jeder anderen aus erreichen.

2. Lösung

Wir verwenden wieder die Sprache der Graphentheorie.

(a) Wir müssen zeigen, dass sich alle Kanten orientieren lassen, sodass in jeder Ecke gleichviele Kanten starten wie enden. Wir verwenden Induktion nach der Kantenzahl k, und werden nicht benützen, dass G zusammenhängend ist. Für $k = 0$ ist nicht zu zeigen, sei also $k > 0$. Wir zeigen zuerst, dass G einen geschlossenen Kantenzug besitzt, der keine Kante mehrfach enthält. Wähle eine beliebige Ecke v_0 mit positivem Grad und eine dazu inzidente Kante e_1. Deren zweiter Endpunkt v_1 besitzt geraden Grad und daher eine weitere Kante $e_2 \neq e_1$. So fortfahrend kann man den entstehenden Kantenzug stets verlängern ausser man erreicht eine Ecke zum zweiten Mal. Dies muss daher zwangsläufig irgendwann passieren und der konstruierte Kantenzug enthält einen geschlossenen Teilweg.

Orientiere nun alle Kanten auf diesem geschlossenen Weg in dieselbe Richtung, dies produziert in jeder Ecke von G gleichviele eingehende wie ausgehende Kanten. Entfernt man nun alle Kanten auf diesem Weg aus G, so erhält man einen neuen Graphen G' mit weniger Kanten, in welchem immer noch jede Ecke gerade Ordnung hat. Nach Induktionsvoraussetzung lassen sich die Kanten von G' geeignet orientieren, und zusammen mit den bereits orientierten Kanten erfüllt diese Kantenorientierung auf G die Bedingung der Aufgabe.

(b) Sei v eine beliebige Ecke des gerichteten Einbahnstrassengraphs. Sei A die Menge der Ecken v' von G, für die es einen gerichteten Weg von v nach v' gibt, und sei B die Menge aller anderen Ecken. Wegen $v \in A$ ist A nicht leer, wir nehmen nun an, dass B auch nicht leer ist, und führen dies zu einem Widerspruch. Per Definition von A und B ist jede Kante, die eine Ecke von A mit einer Ecke von B verbindet, von B nach A orientiert. Da der unterliegende ungerichtete Graph von G zusammenhängend und B nicht leer ist, existiert zudem mindestens eine solche Kante.

Sei also $m > 0$ die Anzahl Kanten von Ecken in B nach Ecken in A, und sei n die Anzahl Kanten, die zwei Punkte in B verbinden. Für eine Ecke u in B

sei $\deg_{out}(u)$ respektive $\deg_{in}(u)$ die Anzahl Kanten von G, die in G beginnen respektive enden. Einerseits gilt dann

$$\sum_{u\in B} \deg_{out}(u) = m+n, \qquad \sum_{u\in B} \deg_{in}(u) = n,$$

andererseits aber $\deg_{out}(u) = \deg_{in}(u)$ für jede Ecke $u \in B$. Ein Widerspruch zu $m > 0$.

8. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die für alle reellen x, y die folgende Gleichung erfüllen:

$$f(x^4 + y^4) = xf(x^3) + y^2 f(y^2).$$

Lösung

Mit $x = y = 0$ erhält man $f(0) = 0$. Mit $y = 0$ folgt weiter

$$xf(x^3) = f(x^4) = f((-x)^4) = -xf(-x^3),$$

also ist f eine ungerade Funktion. Mit $x = 0$ erhält man $f(y^4) = y^2 f(y^2)$, also

$$f(z^2) = zf(z) \qquad \text{für alle } z \geq 0. \tag{3}$$

Mit dem bereits gezeigten erhält man ausserdem

$$f(x^4 + y^4) = xf(x^3) + y^2 f(y^2) = f(x^4) + f(y^4),$$

also

$$f(z+w) = f(z) + f(w) \qquad \text{für alle } z, w \geq 0. \tag{4}$$

Schliesslich folgt nun für alle $z \geq 0$

$$\begin{aligned} f\big((z+1)^2\big) &\overset{(3)}{=} (z+1)f(z+1) \overset{(4)}{=} (z+1)\big(f(z) + f(1)\big), \\ f\big((z+1)^2\big) &= f(z^2 + 2z + 1) \overset{(4)}{=} f(z^2) + 2f(z) + f(1) \overset{(3)}{=} zf(z) + 2f(z) + f(1). \end{aligned}$$

Ein Vergleich dieser beiden Resultate zeigt $f(z) = f(1)z$ für alle $z \geq 0$. Da f ungerade ist, gilt somit

$$f(x) = ax \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

mit einer Konstanten a. Einsetzen zeigt, dass dies tatsächlich alles Lösungen sind.

9. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Eine Gerade durch H schneide AB bzw. AC in den Punkten D bzw. E, so dass $|AD| = |AE|$ gilt. Die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ schneide den Umkreis von ADE im Punkt $K \neq A$. Zeige, dass HK die Strecke BC halbiert.

Lösung

Seien B_1 und B_2 die Schnittpunkte der Geraden AC und DK mit BH. Seien C_1 und C_2 die Schnittpunkte der Geraden AB und EK mit CH. Wegen der Voraussetzung

$|AD| = |EA|$ ist das Dreieck EAD gleichschenklig und somit steht AK senkrecht auf DE. Da $ADKE$ ein Sehnenviereck ist, gilt weiter

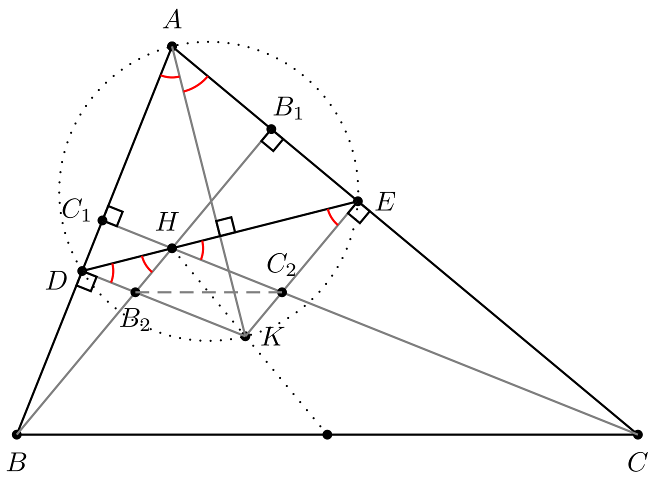
$$\angle DEK = \angle DAK = \angle KAE = 90° - \angle AED,$$

also $\angle AEK = 90°$. Analog folgt $\angle KDA = 90°$. Somit sind die Geraden KD und CH parallel, genauso wie KE und BH. Folglich ist B_2KC_2H ein Parallelogram und die Gerade KH halbiert die Strecke B_2C_2.

Es genügt daher zu zeigen, dass B_2C_2 und BC parallel sind. Nun sind aber die Dreiecke HDB_2 und HEC_2 ähnlich, genauso wie die Dreiecke HDB und HEC. Das liefert

$$\frac{|HB_2|}{|HC_2|} = \frac{|HD|}{|HE|} = \frac{|HB|}{|HC|}$$

und somit die gewünschte Parallelität.



10. Sei P ein relles Polynom, sodass für alle reellen x die Gleichung $P(x) = P(1-x)$ gilt. Beweise, dass ein reelles Polynom Q existiert mit

$$P(x) = Q\big(x(1-x)\big).$$

1. Lösung

Das Polynom $S(x) = P(x+\frac{1}{2})$ erfüllt nach Voraussetzung die Gleichung $S(x) = S(-x)$ für alle reellen x. Also ist S gerade und damit von der Form $S(x) = R(x^2)$ für ein reelles Polynom R. Zur Begründung sei $S(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, dann gilt nämlich

$$0 = S(x) - S(-x) = \sum_{k=0}^{n} \big(1 + (-1)^k\big) a_k x^k$$

für alle reellen x, somit verschwinden nach dem Identitätssatz alle Koeffizienten des Polynoms auf der rechten Seite. Also ist $a_k = 0$ für alle ungeraden $k$und wir können $R(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2k}x$ wählen. Schliesslich setzen wir noch $Q(x) = R(\frac{1}{4}-x)$ und erhalten wie gewünscht

$$P(x) = S\big(x - \tfrac{1}{2}\big) = R\big((x-\tfrac{1}{2})^2\big) = R\big(x^2 - x + \tfrac{1}{4}\big) = Q\big(x(1-x)\big).$$

2. Lösung

Wir verwenden Induktion nach dem Grad von P. Für konstante Polynome ist die Aussage trivial. Division mit Rest liefert reelle Polynome P_1 und R mit

$$P(x) = x(1-x)P_1(x) + R(x),$$

wobei R höchstens Grad 1 besitzt. Setzt man hier $x = 0$ und $x = 1$, dann erhält man $R(0) = P(0) = P(1) = R(1)$ und damit ist R konstant. Weiter erhält man damit und nach Voraussetzung

$$x(1-x)P_1(x) = P(x) - R = P(1-x) - R = (1-x)xP_1(1-x),$$

also $P_1(x) = P_1(1-x)$ für alle $x \neq 0, 1$. Nach dem Identitätssatz für Polynome gilt letztere Gleichung aber auch für $x = 0, 1$ und damit erfüllt P_1 die Induktionsvoraussetzung. Es gibt also ein Polynom Q_1 mit $P_1(x) = Q_1(x(1-x))$. Setzt man nun $Q(x) = xQ_1(x) + R$, erhält man wie gewünscht

$$P(x) = x(1-x)Q_1(x(1-x)) + R = Q(x(1-x)).$$

3. Lösung

Betrachte das symmetrische Polynom

$$S(x,y) = \tfrac{1}{2}\big(P(x) + P(y)\big).$$

Bekanntlich lässt sich jedes symmetrische Polynom als Polynom in den elementarsymmetrischen Ausdrücken $x+y$ und xy schreiben. Das heisst, es existiert ein Polynom R in zwei Variablen, sodass $S(x,y) = R(x+y, xy)$ gilt. Setze nun $Q(x) = R(1,x)$, dann gilt wir gewünscht

$$P(x) = S(x, 1-x) = R\big(1, x(1-x)\big) = Q\big(x(1-x)\big),$$

wobei wir bei der ersten Gleichung die Voraussetzung $P(x) = P(1-x)$ verwendet haben.

11. Finde alle ganzen Zahlen n, sodass $2^n + 3^n + 6^n$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist.

1. Lösung

Wir setzen $A(n) = 2^n + 3^n + 6^n$. Es gilt $A(-1) = 1^2$, $A(0) = 3$, $A(1) = 6$ und $A(2) = 7^2$. Wir betrachten nun zwei Fälle:

- Sei $n \geq 2$ und $A(-n)$ ein rationales Quadrat. Dann ist auch

  $$6^{2n}A(-n) = 6^n(1 + 2^n + 3^n) = 6^n B(n)$$

  ein Quadrat und zwar sogar einer natürlichen Zahl. Ist n gerade, so ist auch $B(n)$ ein Quadrat. Für $n \geq 2$ erhält man aber den Widerspruch $B(n) \equiv 2 \pmod 4$. Ist n ungerade, dann gilt $B(n) = 6m^2$. Für $n \geq 3$ ist aber $B(n) \equiv 1 + 0 + 3 \equiv 4 \pmod 8$, im Widerspruch zu $6m^2 \equiv 0, 6 \pmod 8$.

- Sei $n \geq 3$ und $A(n) = m^2$ das Quadrat einer rationalen, also einer natürlichen Zahl m.

  Wir benötigen folgende Abschätzung:

  $$3^r > 2^r + 1 \qquad \text{für alle } r \geq 2. \tag{5}$$

  Dies gilt wegen $3^r > (2+1) \cdot 2^{r-1} = 2^r + 2^{r-1} > 2^r + 1$.

  Ist nun n ungerade, dann gilt $A(n) \equiv 3 \pmod 4$, im Widerspruch zu $m^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$. Also ist $n = 2k$ gerade und die Gleichung $A(n) = m^2$ lässt sich schreiben als

  $$3^n(2^n + 1) = (m + 2^k)(m - 2^k).$$

  Jeder gemeinsame Teiler der beiden Faktoren rechts teilt auch deren Differenz 2^{k+1}, ist also eine Zweierpotenz. Da die linke Seite der Gleichung aber ungerade ist, sind die beiden Faktoren teilerfremd. Daraus folgt nun, dass 3^n einen dieser Faktoren teilen muss, und zwar den grösseren der beiden wegen (5). Somit ist $m - 2^k$ ein Teiler von $2^n + 1$ und es gelten die folgenden Abschätzungen:

  $$(3^k)^2 = 3^n \leq m + 2^k = (m - 2^k) + 2^{k+1} \leq (2^n + 1) + 2^{k+1} = (2^k + 1)^2,$$

  im Widerspruch zu $k \geq 2$ und (5).

Die gesuchten Werte sind also $n = -1$ und $n = 2$.

12. Bananen, Äpfel und Orangen sind irgendwie auf 100 Kisten verteilt. Beweise, dass man 51 Kisten auswählen kann, die zusammen mindestens die Hälfte der Früchte von jeder Sorte enthalten.

Lösung

Wir beginnen mit folgendem

Lemma 2. *Betrachte $2n$ Paare $(a_1, b_1), \ldots, (a_{2n}, b_{2n})$ von nichtnegativen reellen Zahlen. Dann lassen sich diese immer in zwei Gruppen von n Paaren aufteilen, sodass folgendes gilt: Die Summe aller a_k in der ersten Gruppe und die Summe aller a_k in der zweiten Gruppe unterscheiden sich um höchstens $\max\{a_1, \ldots, a_{2n}\}$. Die Summe aller b_k in der ersten Gruppe und die Summe aller b_k in der zweiten Gruppe unterscheiden sich um höchstens $\max\{b_1, \ldots, b_{2n}\}$.*

Beweis. Wir verwenden Induktion nach n, der Fall $n = 0$ ist trvial. Betrachte also $2n + 2$ solche Paare und seien oBdA (a_1, b_1) und (a_2, b_2) die beiden Paare mit den grössten $a_k's$ und es gelte $b_1 \geq b_2$. Nach Induktionsvoraussetung lassen sich die übrigen $2n$ Paare so aufteilen, dass die Behauptung des Lemmas erfüllt ist. Wir setzen nun (a_1, b_1) in die Gruppe mit der kleineren b-Summe und (a_2, b_2) in die andere Gruppe. Die Differenz der neuen b-Summen ist dann stets höchstens die alte b-Differenz oder höchstens gleich $b_1 - b_2 \leq b_1$, in beiden Fällen nicht grösser als $\max\{b_1, \ldots, b_{2n+2}\}$. Die neue a-Differenz ist höchstens gleich der Summe aus der alten a-Differenz und $|a_1 - a_2|$. Die alte a-Differenz ist nach Konstruktion aber höchstens gleich $\max\{a_3, \ldots, a_{2n+2}\} \leq \min\{a_1, a_2\}$. Folglich ist die neue a-Differenz höchstens gleich $\min\{a_1, a_2\} + |a_1 - a_2| = \max\{a_1, a_2\}$ □

Nun zur eigentlichen Lösung. Wähle zwei Kisten aus, unter denen eine Kiste mit der grössten Menge Bananen und eine Kiste mit der grössten Menge Äpfeln ist. Für $1 \leq k \leq 98$ sei a_k die Menge Bananen und b_k die Menge Äpfel in der k-ten der verbleibenden Kisten. Teile diese nun in zwei Gruppen mit je 49 Kisten auf, sodass die Aussage des Lemmas gilt. Wähle diejenige Gruppe mit mehr Orangen aus und füge die beiden Kisten vom Anfang hinzu. Diese 51 Kisten enthalten nach Konstruktion mindestens die Hälfte aller Orangen, wegen dem Lemma und der Wahl der ersten beiden Kisten aber auch mindestens die Hälfte aller Bananen und Äpfel.