IMO Selektion 2009 Lösungen

1. Sei $GERMANYISHOT$ ein reguläres Zwölfeck. Die Geraden GN und MI schneiden sich im Punkt P. Beweise, dass

(a) der Umkreis von Dreieck GIP gleich gross ist wie der Umkreis von $GERMANYISHOT$.

(b) die Strecke PA gleich lang ist wie eine Seite von $GERMANYISHOT$.

1. Lösung

(a) Für einen beliebigen Punkt U und eine beliebige Gerade VW bezeichne $f(U)$ bzw. $f(VW)$ die Spiegelung an der Geraden GI. Da $GERMANYISHOT$ regulär ist, gilt $\angle IGN = \angle IGH = 30°$ und darum $f(GP) = GH$. Analog gilt $\angle GIM = \angle GIH = 45°$ und daher $f(IP) = IH$. Aus diesen beiden Beobachtungen folgt $f(P) = H$ und somit geht bei der Spiegelung an GI der Umkreis des Dreiecks GIP in den Umkreis des Dreiecks GIH über. Die beiden Kreise sind also insbesondere gleich gross.

(b) Sei $B = f(A)$. Es bleibt zu zeigen, dass $HB = HS = HO$ gilt. Mit anderen Worten, dass H der Umkreismittelpunkt des Dreiecks BSO ist. Wegen der Regularität von $GERMANYISHOT$ liegt H auf der Mittelsenkrechten von SO. Es genügt deshalb, $\angle SHO = 2 \cdot \angle SBO$ zu beweisen. Wegen $\angle GIA = \angle GIS = 60°$ und $\angle IGA = \angle IGO = 45°$ schneiden sich die Geraden IS und GO in B und es gilt $\angle SBO = 75°$. Da $\angle SHO$ ein Innenwinkel von $GERMANYISHOT$ ist, gilt $\angle SHO = 150° = 2 \cdot \angle SBO$.

2. Lösung

(a) Wir behaupten, dass die Spiegelung des Umkreises von GIP an GI mit dem Umkreis des Zwölfecks übereinstimmt. Die Spiegelung von P an GI liegt nach dem Peripheriewinkelsatz genau dann auf dem Umkreis des Zwölfecks, wenn $\angle GPI = \angle ISG$ gilt. Sei α der Peripheriewinkel über einer Seite des Zwölfecks. Es gilt dann

$$\angle GPI = \angle GNI + \angle PIN = 5\alpha + 2\alpha = 7\alpha = \angle ISG.$$

(b) Sei P' der zweite Schnittpunkt des Kreises mit Mittelpunkt A durch M und der Geraden IM. Nach dem Zentriwinkelsatz gilt $2\alpha = \frac{360°}{12}$, also $\alpha = 15°$. Eine kurze Winkeljagd zeigt $\angle P'NA = 60°$. Es gilt zudem $\angle PNA = \angle GNA = 4\alpha = 60°$ und damit folgt $P = P'$.

2. Finde ein Paar (m, n) ungerader natürlicher Zahlen mit $m, n > 2009$ und

$$m \mid n^2 + 8, \qquad n \mid m^2 + 8.$$

Lösung

Da m und n ungerade sind, folgt sofort $(m, n) = (m, m^2 + 8) = (n, n^2 + 8) = 1$. Somit erfüllt ein Paar (m, n) genau dann die Bedingung der Aufgabe, wenn mn ein Teiler ist von $(m^2+8)(n^2+8)$. Da m und n ungerade sind, ist dies wiederum genau dann der Fall, wenn

$$\frac{m^2+n^2+8}{mn} = k \tag{1}$$

eine natürliche Zahl ist. Wegen der Symmetrie des Problems können wir uns auf die Paare (m,n) ungerader natürlicher Zahlen mit $m \geq n$ beschränken. Wir nennen solche Paare *gut*, wenn sogar $m > n$ gilt. Man überzeugt sich sofort davon, dass $(1,1)$ das einzige nicht gute Lösungspaar ist. Wir fixieren im Folgenden k und fassen (1) bei festem n als quadratische Gleichung $m^2 - kn \cdot m + (n^2+8) = 0$ in m auf. Diese Gleichung besitzt eine zweite Lösung m' und nach dem Satz von Vieta gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} m + m' &= kn, \\ mm' &= n^2+8. \end{aligned}$$

Aus der ersten folgt, dass m' auch ganz ist, und aus der zweiten folgt $m' > 0$ und dass m' ungerade ist. Ist zudem $n \geq 4$, dann können m, m' nicht beide grösser als n sein, denn hätte man den Widerspruch

$$n^2+8 = mm' \geq (n+1)^2 = n^2+2n+1 \geq n^2+9$$

zur zweiten Gleichung. Wir erhalten daher zu jedem zulässigen Paar (m,n) mit $n \geq 4$ ein kleineres zulässiges Paar $\downarrow(m,n) = (n, kn-m)$. Invers dazu erhält man zu jedem Lösunspaar (m,n) mit $m \geq n$ ein zulässiges (wegen $k \geq 3$) Lösungspaar $\uparrow(m,n) = (km-n, m)$. Es genügt somit, die Lösungspaare mit $m \geq n$ und $n \leq 3$ zu finden. Eine kurze Analyse dieser Fälle liefert schliesslich, dass sämtliche Lösungen durch iterierte Anwendung von $\uparrow$ aus den beiden minimalen Lösungen $(1,1)$ zu $k=10$ und $(3,1)$ zu $k=6$ entstehen. Man erhält für die ersten paar Iterationen die Paare

$$(1,1), \quad (9,1), \quad (89,9), \quad (881,89), \quad (8721,881), \ldots$$

und

$$(3,1), \quad (17,3), \quad (99,17), \quad (567,99), \quad (3303,567), \ldots$$

Die gesuchten Paare sind also die jeweils vier ersten dieser beiden Familien (sowie deren Vertauschungen).

Bemerkungen:

(i) Wir haben gezeigt, dass alle Lösungspaare bis auf Vertauschung von der Form (a_i, a_{i+1}) sind, wobei die Folge a_i rekursiv gegeben ist durch

$$a_0 = a_1 = 1, \qquad a_i = 10a_{i-1} - a_{i-2}, \quad i \geq 2,$$

beziehungsweise durch

$$a_0 = 1, a_1 = 3, \qquad a_i = 6a_{i-1} - a_{i-2}, \quad i \geq 2.$$

Man kann explizite Formeln für diese Folgen angeben, nämlich

$$a_i = \tfrac{3-\sqrt{6}}{6}(5+2\sqrt{6})^i + \tfrac{3+\sqrt{6}}{6}(5-2\sqrt{6})^i,$$

respektive

$$a_i = \tfrac{1}{2}(3+2\sqrt{2})^i + \tfrac{1}{2}(3-2\sqrt{2})^i.$$

(ii) Die Gleichung (1) besitzt zu $k = 4$ noch eine weitere Familie von Lösungen (die allerdings nicht mehr ungerade sind). Sie sind ebenfalls von der Form (a_i, a_{i+1}) mit

$$a_0 = a_1 = 2, \qquad a_i = 4a_{i-1} - a_{i-2}, \quad i \geq 2.$$

3. Sei n eine natürliche Zahl. Bestimme die Anzahl Permutationen $(a_1, \ldots, a_n)$ der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ mit der folgenden Eigenschaft:

$$2(a_1 + \ldots + a_k) \quad \text{ist durch } k \text{ teilbar} \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Lösung

Wir nennen eine Permutation mit dieser Eigenschaft gut. Für $n \leq 3$ sind alle Permutationen gut. Weiter ist leicht zu sehen, dass für jede gute Permutation $(a_1, \ldots, a_n)$ auch die beiden Permutationen

$$(a_1, \ldots, a_n, n+1) \qquad \text{und} \qquad (a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots, a_n + 1, 1)$$

gut sind. Wir zeigen nun, dass für $n \geq 3$ jede gute $(n+1)$-Permutation in dieser Weise aus einer guten n-Permutation entsteht. Somit existieren genau $3 \cdot 2^{n-2}$ gute n-Permutationen für $n \geq 3$.

Sei also $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ eine gute Permutation. Dann gilt insbesondere

$$\begin{aligned} n \quad &| \quad 2(a_1 + \ldots + a_n) = 2(1 + 2 + \ldots + (n+1) - a_{n+1}) = (n+1)(n+2) - 2a_{n+1} \\ &= \quad n(n+3) - 2(a_{n+1} - 1), \end{aligned}$$

und somit ist $2(a_{n+1} - 1)$ durch n teilbar. Wegen $0 \leq 2(a_{n+1} - 1) \leq 2n$ bleiben nur die Möglichkeiten $a_{n+1} = 1$, $a_{n+1} = \frac{n}{2} + 1$ und $a_{n+1} = n + 1$. Nehme an, das zweite sei der Fall. Ähnlich wie vorher erhält man

$$\begin{aligned} n - 1 \quad &| \quad 2(a_1 + \ldots + a_{n-1}) = 2(1 + 2 + \ldots + (n+1) - a_{n+1} - a_n) \\ &= \quad (n+1)(n+2) - (n+2) - 2a_{n+1} = (n-1)(n+3) - (2a_n - 3), \end{aligned}$$

und daher ist $2a_n - 3$ durch $n - 1$ teilbar. Wegen $n \geq 3$ gilt nun $-(n-1) < 2a_n - 3 < 3(n-1)$ und es bleibt nur die Möglichkeiten $a_n = \frac{n}{2} + 1 = a_{n+1}$, ein Widerspruch.

Somit gilt $a_{n+1} = 1$ oder $a_{n+1} = n + 1$. Im ersten Fall ist $(a_1 - 1, \ldots, a_n - 1)$ eine gute n-Permutation, im zweiten Fall ist $(a_1, \ldots, a_n)$ eine solche. Somit entstehen in der Tat alle guten $(n+1)$-Permutationen in der vorher beschriebenen Art aus guten n-Permutationen. Dies schliesst den Beweis ab.

4. Für welche natürlichen Zahlen n existiert ein Polynom $P(x)$ mit ganzen Koeffizienten, sodass $P(d) = (n/d)^2$ gilt für alle positiven Teiler d von n?

1. Lösung

So ein Polynom existiert genau dann, wenn n prim ist, $n = 1$ oder $n = 6$. Im ersten Fall leistet $P(x) = -(n+1)x + (n^2 + n + 1)$ das Gewünschte, für $n = 1$ das Polynom $P(x) = 1$ und für $n = 6$ das Polynom $P(x) = -2x^3 + 23x^2 - 82x + 97$.

Wir zeigen nun, dass dies die einzigen möglichen Werte von n sind und können $n > 1$ annehmen. Nehme an, n sei durch das Quadrat einer Primzahl p teilbar. Schreibe $n = p^k m$ mit $k \geq 2$ und $p \nmid m$, dann gilt

$$p \,|\, p^k - p^{k-1} \,|\, P(p^k) - P(p^{k-1}) = m^2 - (pm)^2 = m^2(1 - p^2).$$

Dies kann aber nicht sein, denn p teilt die rechte Seite nicht. Nehme an, n sei nicht prim und p sei der grösste Primteiler von n. Für jeden Primteiler $q \neq p$ schreibe man $n = pqm$ und erhält

$$p(q-1) = pq - p \,|\, P(pq) - P(p) = m^2 - (qm)^2 = m^2(1 - q^2),$$

also $p \,|\, q + 1$ da m nicht durch p teilbar ist. Wegen $p > q$ gilt also $p = q + 1$ und somit $p = 3, q = 2$. Da q aber beliebig war, muss $n = 6$ gelten.

2. Lösung

Wir können wieder $n > 1$ annehmen. Seien $1 = d_1 < \ldots < d_k = n$ die positiven Teiler von n, es gilt dann $d_i d_{k+1-i} = n$. Aus der Bedingung

$$d_{k-1}(d_2 - 1) = n - d_{k-1} \,|\, P(n) - P(d_{k-1}) = 1 - d_2^2$$

folgt $d_{k-1} \,|\, d_2 + 1$. Somit ist also $k = 2$ oder $k = 4$ und $d_3 = d_2 + 1$. Im ersten Fall ist n prim, im zweiten Fall ist n ein Produkt zweier verschiedener Primzahlen d_2, d_3 mit $d_3 = d_2 + 1$. Somit ist $d_2 = 2, d_3 = 3$ und $n = 6$.

3. Lösung

Wir nehmen wieder $n > 1$ an und zeigen, dass n prim oder $n = 6$ ist. Das Polynom $x^2 P(x) - n^2$ besitzt sämtliche positiven Teiler von n als Nullstellen. Somit existiert ein Polynom $Q(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$ mit ganzen Koeffizienten und

$$x^2 P(x) - n^2 = Q(x) \prod_{d \,|\, n} (d - x).$$

Ein Vergleich der konstanten und linearen Koeffizienten auf beiden Seiten ergibt die Gleichungen

$$n^2 = -a_0 \prod_{d \,|\, n} d, \qquad a_1 = a_0 \sum_{d \,|\, n} \frac{1}{d}.$$

Aus der ersten folgt, dass n höchstens vier positive Teiler besitzt, sonst wäre die rechte Seite ein echtes Vielfaches von n^2. Wir nehmen nun an, dass n nicht prim ist, und unterscheiden zwei Fälle.

- n besitzt genau drei Teiler. Dann ist $n = p^2$ mit einer Primzahl p. Die erste der obigen Gleichungen liefert dann $a_0 = -p$, damit folgt aber mit der zweiten Gleichung, dass a_1 nicht ganz sein kann, ein Widerspruch.
- n besitzt genau vier Teiler $1 < p < q < n$ (dann ist p prim und q entweder auch prim oder das Quadrat von p). Aus der ersten Gleichung folgt $a_0 = -1$ und aus der zweiten, dass $(1 + \frac{1}{p})(1 + \frac{1}{q})$ ganz sein muss. Wegen $1 < p < q$ ist dies nur für $p = 2, q = 3$ der Fall. Somit ist $n = 6$.

5. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck und seien P und Q Punkte innerhalb des Vierecks $ABCD$, so dass $PQDA$ und $QPBC$ Sehnenvierecke sind. Nehme an, dass ein Punkt E auf der Strecke PQ existiert, so dass $\angle PAE = \angle QDE$ und $\angle PBE = \angle QCE$. Zeige, dass $ABCD$ ein Sehnenviereck ist.

1. Lösung

Die Gerade PQ ist die Potenzlinie der beiden Kreise durch $PQDA$ und $QPBC$. Wenn sich die Geraden AD und BC in einem Punkt Z schneiden, so ist $ABCD$ genau dann ein Sehnenviereck wenn $ZD \cdot ZA = ZC \cdot ZB$ gilt. Die Potenz muss also zu beiden Kreisen gleich gross sein. Dies ist aber genau dann der Fall wenn Z auf PQ liegt. Sind die Geraden AD, BC und PQ parallel, so sind $PQDA$ und $QPBC$ gleichschenklige Trapezoide und es folgt, dass auch $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapezoid und insbesondere ein Sehnenviereck ist. Es genügt also zu zeigen, dass die Geraden AD und BC und PQ sich in einem Punkt schneiden oder parallel sind.

Es gilt

$$\angle DEQ = 180^\circ - \angle EDQ - \angle DQE = 180^\circ - \angle EAP - (180^\circ - \angle PAD = \angle EAD.$$

Nach dem Tangentenwinkelsatz ist also die Gerade PQ tangential zum Umkreis des Dreiecks AED. Wir nehmen an, dass die Geraden AD und PQ nicht parallel sind. Sei X der Schnittpunkt von AD mit PQ. Nach dem Potenzsatz gilt $XE^2 = XA \cdot XD = XP \cdot XQ$. Sei $PE = a$, $EQ = b$ und $QX = x$, wobei wir gerichtete Längen betrachten. Die Länge x ist also positiv, wenn Q zwischen P und X liegt und sonst negativ. Wegen obigen Überlegungen gilt $x(x + a + b) = (x + b)^2$ und somit $x = \frac{b^2}{a-b}$. Wir nehmen nun an, dass BC parallel ist zu PQ. Dann ist $QPBC$ ein gleichschenkliges Trapezoid, und E muss die Strecke PQ halbieren, es gilt also $a = b$. Dann hat aber die obige Gleichung keine Lösung und AD müsste auch parallel zu PQ sein. Wir können also annehmen, dass PQ nicht parallel zu BC ist und definieren Y als den Schnittpunkt dieser beiden Geraden. Sei wieder $y = QY$ dann folgt $y = \frac{b^2}{a-b}$. Somit ist $x = y$, $X = Y$ und die die Geraden AD und BC schneiden sich auf PQ. Wenn AD und PQ parallel sind, so muss wegen dem obigen Argument auch BC parallel zu PQ sein.

2. Lösung

Seien k_1, k_2, k_3 und k_4 die Umkreise von $PQDA$, $QPBC$, AED und BEC. Wie in der 1. Lösung zeigt man, dass k_3 und k_4 tangential zu PQ sind, und dass die Aussage richtig ist, wenn die Geraden AD, PQ und BC parallel sind. Wir können also O.b.d.A. annehmen, dass sich die Geraden PQ und AD in X schneiden. Wir müssen nun zeigen, dass X auf BC liegt oder in anderen Worten, dass X auf der Potenzlinie von k_2 und k_4 liegt. Es gilt

$$XE^2 = XD \cdot XA = XP \cdot XQ$$

also ist die Potenz zu beiden Kreisen gleich gross.

6. Sei P die Menge der ersten 2009 Primzahlen und sei X die Menge aller natürlichen Zahlen, welche nur Primfaktoren aus P besitzen. Bestimme alle natürlichen Zahlen k, für die eine Funktion $f : X \to X$ existiert, welche für alle $m, n \in X$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$f(mf(n)) = f(m)n^k.$$

Lösung

Es existiert genau dann eine solche Funktion, wenn k eine Quadratzahl ist.

Sei zuerst $k = l^2$ ein Quadrat, dann hat die Funktion $f(n) = n^l$ die gewünschte Eigenschaft, denn beide Seiten der Gleichung lauten $m^l n^k$.

Umgekehrt existiere so ein f. Sei $a = f(1) \in X$. Setze $n = 1$, dann folgt $f(am) = f(m)$ für alle $m \in X$. Ersetze nun n durch an in der ursprünglichen Gleichung, dann gilt weiter $f(m)n^k = f(mf(n)) = f(mf(an)) = f(m)(an)^k$, also ist $a = f(1) = 1$. Mit $m = 1$ folgt nun

$$f(f(n)) = n^k \qquad \text{für alle } n \in X. \tag{2}$$

Ersetzt man hier noch n durch $f(n)$, dann folgt zudem $f(n^k) = f(n)^k$ für alle n. Ersetzt man in der ursprünglichen Gleichung m durch $f(m)$ und wendet f auf beide Seiten an, dann gilt mit dem eben Gezeigten

$$\big(f(m)f(n)\big)^k = f\big(f\big(f(m)f(n)\big)\big) = f\big((mn)^k\big) = f(mn)^k,$$

also

$$f(mn) = f(m)f(n) \qquad \text{für alle } m, n \in X. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) lassen sich nun die folgenden Schlüsse ziehen:

- Ist $n \neq 1$, dann ist auch $f(n) \neq 1$. Sonst wäre nämlich $n^k = f(f(n)) = f(1) = 1$, ein Widerspruch.
- Sind m, n teilerfremd, dann auch $f(m)$ und $f(n)$. Wäre nämlich $d > 1$ ein gemeinsamer Teiler dieser beiden Zahlen, dann folgt aus (3), dass $f(d) > 1$ ein gemeinsamer Teiler von $f(f(a)) = a^k$ und $f(f(b)) = b^k$ wäre, Widerspruch.
- Für jede Primzahl $p \in P$ ist $f(p)$ eine Potenz einer Primzahl $q \in P$. Sonst wäre $f(p)$ nämlich ein Produkt von zwei teilerfremden Zahlen > 1 und somit auch $p^k = f(f(p))$.
- Wir können also eine Funktion $g : P \to P$ definieren wie folgt: Für jede Primzahl $p \in P$ sei $g(p) \in P$ diejenige Primzahl, von der $f(p)$ eine Potenz ist. Wegen (2) ist g nun eine Involution, d.h. es gilt $g \circ g = id_P$. Da P eine ungerade Anzahl Elemente besitzt, muss g also einen Fixpunkt p haben.
- Somit gilt $f(p) = p^l$ mit einer natürlichen Zahl l und mit (3) daher $p^k = f(f(p)) = f(p^l) = (p^l)^l = p^{l^2}$. Damit ist $k = l^2$ eine Quadratzahl, wie behauptet.

Bemerkung: Dasselbe Resultat gilt, wenn 2009 durch eine beliebige ungerade natürliche Zahl r ersetzt wird. Für gerades r hingegen existiert zu *jedem* k eine solche Funktion f. Zur Konstruktion partitioniere man P in $r/2$ disjunkte Paare (p_i, q_i) von Primzahlen. Die eindeutig bestimmte Funktion $f : X \to X$ mit

- $f(mn) = f(m)f(n)$ für alle $m, n \in X$,
- $f(p_i) = q_i$ und $f(q_i) = p_i^k$

erfüllt dann die Gleichung $f(mf(n)) = f(m)n^k$ für alle $m, n \in X$.

7. Betrachte eine Menge A von 2009 Punkte in der Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Ein Dreieck, dessen Eckpunkte alle in A liegen, heisst *internes Dreieck*. Beweise, dass jeder Punkt aus A im Innern einer geraden Anzahl interner

Dreiecke enthalten ist.

1. Lösung

Wir betrachten eine Menge B aus 2008 Punkten und einen weiteren Punkt $P \notin B$, sodass keine drei der Punkte aus $B \cup \{P\}$ auf einer Geraden liegen. Wir zeigen, dass die Anzahl $\alpha(P)$ der Dreiecke mit Eckpunkten in B, welche P im Innern enthalten, gerade ist. Die Menge aller Strecken mit Endpunkten in B zerlegt die Ebene in endlich viele polygonale Gebiete. Offenbar ändert sich $\alpha(P)$ nicht, wenn P im Innern eines solchen Gebietes variiert. Ausserdem ist $\alpha(P) = 0$ gerade, wenn P ausserhalb der konvexen Hülle von B liegt. Somit genügt es zu zeigen, dass sich $\alpha(P)$ um eine gerade Zahl ändert, wenn P von einem Gebiet in ein benachbartes Gebiet „wandert".

Betrachte also zwei benachbarte solche Gebiete, die durch ein Teilsegment der Strecke XY getrennt werden. Nehme an, genau k Punkte aus B liegen auf derselben Seite der Geraden XY wie P. Auf der anderen Seite liegen dann $2006 - k$ Punkte aus B. Wandert nun P ins Nachbargebiet, dann verlässt P genau die k internen Rechtecke, die XY als Seite haben und deren dritter Eckpunkt auf derselben Seite der Gerade XY liegt wie P. Analog tritt P in genau $2006 - k$ interne Dreiecke mit XY als Seite ein. Insgesamt ändert sich $\alpha(P)$ also um die gerade Zahl $(2006-k)-k = 2\cdot(1003-k)$. Damit ist alles gezeigt.

2. Lösung

Wir betrachten zuerst fünf Punkte, von denen keine drei kollinear sind. Man überzeugt sich leicht davon, dass jeder dieser Punkte im Innern von keinem oder von genau zwei Dreiecken liegt, die drei der anderen Punkte als Ecken haben. Man unterscheide dazu drei Fälle, je nachdem ob die konvexe Hülle dieser fünf Punkte ein Dreieck, Viereck oder Fünfeck ist.

Sei nun $P \in A$ ein fester Punkt, der in genau m internen Dreiecken liegt. Wir zählen die Anzahl Paare (Δ, Q) aus einem internen Dreieck Δ, das P enthält, und einem weiteren Punkt Q, der verschieden ist von P und den drei Eckpunkten von Δ.

(i) Es gibt genau m Möglichkeiten, Δ zu wählen und anschliessend genau 2005 Möglichkeiten für Q. Insgesamt gibt es also $2005m$ solche Paare.

(ii) Für jede Menge $\{X, Y, Z, W\}$ aus vier Punkten aus $A \setminus \{P\}$ liegt P nach der Beobachtung im ersten Abschnitt in einer geraden Anzahl interner Dreiecke mit Eckpunkten aus dieser Menge. Somit existiert eine gerade Anzahl Paare (Δ, Q), wobei Q einer der Punkte aus $\{X, Y, Z, W\}$ ist und Δ die drei anderen Punkte als Ecken besitzt. Summation über alle vierelementigen Mengen liefert also, dass die Gesamtzahl solcher Paare gerade ist.

Somit ist $2005m$ gerade, also auch m.

3. Lösung

Fixiere einen Punkt P aus A und nehme an, er sei in n internen Dreiecken enthalten. Wir zählen die Anzahl Paare (Δ_1, Δ_2) interner Dreiecke, die beide P enthalten, und die genau eine gemeinsame Seite haben.

(i) Diese Zahl ist gerade, denn es gilt per Definition $\Delta_1 \neq \Delta_2$ und somit ist mit (Δ_1, Δ_2) auch (Δ_2, Δ_1) ein solches Paar.

(ii) Es gibt n Möglichkeiten, Δ_1 zu wählen. Zu jedem solchen Dreieck $\Delta_1 = XYZ$ und zu jedem Punkt $Q \neq P, X, Y, Z$ aus A ist P in genau einem der drei Dreiecke QXY, QYZ, QZX enthalten. Dies folgt aus dem ersten Abschnitt der zweiten Lösung. Somit gibt es jeweils 2005 Möglichkeiten Δ_2 zu wählen und insgesamt also $2005n$ solche Paare.

Somit ist $2005n$ gerade, also auch n.

8. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle reellen x, y gilt

$$f(f(x) - f(y)) = (x - y)^2 f(x + y).$$

Lösung

Mit $x = y$ folgt $f(0) = 0$. Mit $x = 0$ respektive $y = 0$ erhält man die beiden Gleichungen $f(-f(y)) = y^2 f(y)$ und $f(f(x)) = x^2 f(x)$ und durch Kombination weiter

$$f(f(x)) = f(-f(x)) \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Offenbar ist die Nullfunktion $f \equiv 0$ eine Lösung, wir nehmen daher im Folgenden an, dass $f(a) \neq 0$ gilt für ein $a \in \mathbb{R}$. Mit $y = a - x$ erhält man dann

$$f(f(x) - f(a - x)) = (2x - a)^2 f(a)$$

und hier nimmt die rechte Seite alle positiven respektive alle negativen rellen Werte an, je nach Vorzeichen von $f(a)$. Dasselbe gilt für die linke Seite und somit auch für f. Zusammen mit (4) zeigt das in beiden Fällen, dass f eine gerade Funktion ist.

Ersetzt man nun in der ursprünglichen Gleichung y durch $-y$, dann ändert sich die linke Seite nicht, und ein Vergleich der alten und neuen rechten Seite ergibt die Gleichung

$$(x - y)^2 f(x + y) = (x + y)^2 f(x - y).$$

Setzt man hier schliesslich noch $y = x - 1$, dann folgt $f(2x - 1) = (2x - 1)^2 f(1)$, also sind alle Lösungen von der Gestalt $f(x) = cx^2$ für eine Konstante $c \neq 0$. Einsetzen zeigt $c = \pm 1$ und die drei Lösungen sind

$$f(x) = 0, \quad f(x) = x^2, \quad f(x) = -x^2.$$

9. In einem spitzwinkligen Dreieck ABC seien BE und CF Höhen. Zwei Kreise durch A und F berühren die Gerade BC bei P und Q, so dass B zwischen C und Q liegt. Beweise, dass sich die Geraden PE und QF auf dem Umkreis von AEF schneiden.

Lösung

Seien wie immer $\angle BAC = \alpha$ und $\angle ABC = \beta$. Der Schnittpunkt von QF mit PE sei S. Es genügt die Gleichung $\angle FQB + \angle EPB = 180° - \alpha$ zu zeigen, denn daraus folgt $\angle FSE = \alpha$ und $AFES$ ist ein Sehnenviereck. Wir kümmern uns zuerst um den Winkel $\angle EPB$. Sei H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC, es ist leicht zu sehen, dass $AFHE$ ein Sehnenviereck ist. Nach dem Potenzsatz gilt nun

$$BP^2 = BF \cdot BA = BH \cdot BE,$$

folglich ist der Umkreis von HEP tangential zur Gerade BC. Nach dem Tangentenwinkelsatz gilt $\angle BPH = \angle BEP$, also ist BPH ähnlich zu BEP und es gilt

$$\angle EPB = \angle BHP.$$

Wegen $\angle BHC = 180° - \alpha$ genügt es zu zeigen, dass $\angle PHC = \angle FQB$ gilt. Da B auf der Potenzlinie der Umkreise von AFP und AFQ liegt, gilt $BP = BQ$. Sei D der Höhenfusspunkt zu A. Da $AFDC$ ein Sehenviereck ist, gilt $BP^2 = BF{\cdot}BA = BD{\cdot}BC$. Daraus foglt nun

$$DP \cdot DQ = (BP - BD) \cdot (BP + BD) = BP^2 - BD^2 = BD \cdot (BC - BD) = BD \cdot DC.$$

Zudem ist $BD \cdot DC = DH \cdot DA$, wie man z.B. mithilfe der ähnlichen Dreiecke BDH und ADC sehen kann. Es folgt $AD \cdot DH = DP \cdot DQ$, somit sind die Dreiecke DPH und DAQ ähnlich. Daraus erhalten wir schliesslich wie gewünscht

$$\begin{aligned} \angle PHC &= \angle HPD - \angle HCP = \angle DAQ - (90° - \beta) \\ &= \angle BAQ + (90° - \beta) - (90° - \beta) = \angle FQB. \end{aligned}$$

10. Sei n eine natürliche Zahl und seien a, b zwei verschiedene ganze Zahlen mit folgender Eigenschaft: Für jede natürliche Zahl m ist $a^m - b^m$ durch n^m teilbar. Zeige, dass a, b beide durch n teilbar sind.

1. Lösung

Offenbar genügt es den Fall zu betrachten, wo $n = p^k$ eine Primpotenz ist. Sei zunächst $k = 1$. Nehme an, a und b seien nicht durch p teilbar, mit $m = 1$ folgt dann $a \equiv b \not\equiv 0 \pmod{p}$. Wir zeigen, dass $a - b$ durch beliebig grosse p-Potenzen teilbar ist, im Widerspruch zu $a \neq b$. Fixiere dazu eine natürliche Zahl r und wende die Voraussetzung auf $m = r$ und $m = r + 1$ an. Es gilt also insbesondere

$$a^r \equiv b^r \pmod{p^r} \qquad \text{und} \qquad a^{r+1} \equiv b^{r+1} \pmod{p^r}$$

und somit auch

$$a \equiv a^{r+1} \cdot a^{-r} \equiv b^{r+1} \cdot b^{-r} \equiv b \pmod{p^r}.$$

Für den allgemeinen Fall verwenden wir Induktion nach k. Nehme an, für $k - 1$ sei die Aussage bereits bewiesen. Wegen $p^m \mid (p^k)^m \mid a^m - b^m$ und dem Fall $k = 1$ sind a und b beide durch p teilbar. Wir schreiben $a = pa'$ und $b = pb'$ und erhalten die Bedingungen $(p^{k-1})^m \mid (a')^m - (b')^m$. Nach Induktionsvoraussetzung sind a', b' durch p^{k-1} teilbar und die Induktion ist komplett.

2. Lösung

Wir können wieder annehmen, dass $n = p^k$ eine Primpotenz ist. Für eine ganze Zahl $a \neq 0$ bezeichne $v_p(a)$ den Exponenten der grössten p-Potenz, die a teilt. Wir nehmen an, dass a, b nicht durch p^k teilbar sind und setzen $c = a - b$. Nach Annahme ist $r = v_p(b) < k$. Aus der Bedingung für $m = 1$ folgt andererseits $s = v_p(c) \geq k$. Sei m eine beliebige natürliche Zahl, die nicht durch p teilbar ist und betrachte die Binomialentwicklung

$$a^m - b^m = (b + c)^m - b^m = mb^{m-1}c + \sum_{l=2}^{m} \binom{m}{l} b^{m-l}c^l.$$

Einerseits ist $v_p(mb^{m-1}c) = s + r(m-1)$, andererseits sind sämtliche anderen Summanden auf der rechten Seite mindestens durch $p^{2s+r(m-2)}$ teilbar. Wegen $s > r$ ist daher

$$v_p(a^m - b^m) = s + r(m-1) \leq s + (k-1)(m-1) < s + (k-1)m.$$

Wegen $(p^k)^m \mid a^m - b^m$ muss nun die Abschätzung

$$km \leq v_p(a^m - b^m) < s + (k-1)m$$

gelten für alle m, die nicht durch p teilbar sind. Das ist für $m \geq s$ aber nicht der Fall, Widerspruch.

3. Lösung

Wir geben ein weiteres Argument und beschränken uns der Einfachheit halber auf den Fall einer Primzahl p. Nehme an, a und b seien nicht durch p teilbar. Aus der Bedingung für $n = 1$ erhält man $a \equiv b \pmod{p}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Sei p ungerade. Für $k \geq 1$ gilt die Faktorisierung

$$a^{2^k} - b^{2^k} = (a-b)\prod_{l=0}^{k-1}(a^{2^l} + b^{2^l})$$

  und hier ist keiner der Faktoren des Produkts rechts durch p teilbar wegen $a^{2^l} + b^{2^l} \equiv 2a^{2^l} \not\equiv 0 \pmod{p}$. Damit muss aber $a - b$ durch p^{2^k} teilbar sein. Wegen $a \neq b$ ist dies ein Widerspruch für grosse k.

- Für $p = 2$ kann man die Faktorisierung

$$a^{3^k} - b^{3^k} = (a-b)\prod_{l=0}^{k-1}(a^{2\cdot 3^l} + a^{3^l}b^{3^l} + b^{2\cdot 3^l})$$

  verwenden. Die Faktoren im Produkt rechts sind alle ungerade, also ist $a - b$ durch 2^{3^k} teilbar. Für grosse k liefert dies wieder einen Widerspruch.

11. Betrachte n kollineare Punkte $P_1, \dots, P_n$ und alle Kreise mit Durchmesser P_iP_j für $1 \leq i < j \leq n$. Jeder dieser Kreise wird mit einer von k Farben gefärbt. Eine solche Menge von gefärbten Kreisen heisst ein (n,k)-*Gewusel*. Eine *einfarbige Acht* sind zwei Kreise derselben Farbe, die sich äusserlich tangential berühren. Zeige, dass genau dann jedes (n,k)-Gewusel eine einfarbige Acht enthält, wenn $n > 2^k$ gilt.

1. Lösung

Wir nennen ein Paar (n,k) gut, falls jedes (n,k)-Gewusel eine einfarbige Acht enthält. Ist (n,k) gut, dann offenbar auch alle (n',k) mit $n' \geq n$. Für die Lösung verwenden wir folgende graphentheoretische Uminterpretation des Problems: Für jede endliche Menge D natürlicher Zahlen sei G_D der vollständige Graph auf der Eckenmenge D. Wir verwenden zudem die Notation $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Ein Paar (n,k) ist genau dann gut, wenn für jede Kantenfärbung von $G_{[n]}$ mit k Farben drei Ecken $a < b < c$ existieren, sodass die Kanten ab und bc dieselbe Farbe haben. (In dieser Aussage kann man übrigens die Eckenmenge $[n]$ durch irgendeine Menge von n natürlichen Zahlen ersetzen, dies werden wir unten in den Induktionsargumenten verwenden.)

Wir konstruieren zuerst induktiv eine k-Färbung von $G_{[2^k]}$ ohne zwei solche Kanten. Für $k = 1$ kann man nichts falsch machen, nehme also an, wir hätten eine solche $(k-1)$-Färbung auf $G_{[2^{k-1}]}$ bereits konstruiert. Färbe in $G_{[2^k]}$ alle Kanten ab mit $a \leq 2^{k-1}$ und $b > 2^{k-1}$ mit der ersten Farbe. Anschliessend färbe man die beiden Graphen $G_{[2^{k-1}]}$ und $G_{[2^k]\setminus[2^{k-1}]}$ gemäss Induktionsvoraussetzung mit den verbleibenden $k-1$ Farben. Man überlegt sich leicht, dass diese k-Färbung das Gewünschte leistet

Wir zeigen nun mit Induktion nach k, dass für alle schlechten Paare (n,k) die Abschätzung $n \leq 2^k$ gilt. Dies ist klar für $k = 1$ und gelte für $k-1$. Betrachte eine k-Färbung von $G_{[2^k]}$ ohne zwei solche Kanten und wähle eine beliebige Farbe f. Sei A die Menge der Ecken, die eine ausgehende Kante der Farbe f haben, und sei $B = [n] \setminus A$. Nach Annahme und nach Wahl von A besitzt weder der G_A noch G_B eine Kante der Farbe f. Nach Induktionsannahme gilt daher $|A|, |B| \leq 2^{k-1}$ und damit $n \leq 2^k$ wie behauptet.

2. Lösung

Wir geben ein zweites Argument dafür, dass jedes schlechte Paar die Abschätzung $n \leq 2^k$ erfüllt. Betrachte eine k-Färbung von $G_{[2^k+1]}$ und für jede Ecke a die Menge der Farben von Kanten ab mit $a < b$. Da die Menge der k Farben genau 2^k Teilmengen besitzt, müssen nach dem Schubfachprinzip zwei Ecken, sagen wir $x < y$, dieselbe solche Farbmenge F haben. Nun kann F nicht leer sein, denn nur die Ecke $2^k + 1$ besitzt überhaupt keine Kante zu einer grösseren Ecke. Nach Konstruktion hat nun die Kante xy dieselbe Farbe wie eine Kante yz mit $y < z$, ein Widerspruch.

12. Seien x, y, z reelle Zahlen, welche die Gleichung $x + y + z = xy + yz + zx$ erfüllen. Beweise die Ungleichung

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} \geq -\frac{1}{2}.$$

1. Lösung

Die Ungleichung ist äquivalent zu

$$\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{(y+1)^2}{y^2+1} \geq \frac{(z-1)^2}{z^2+1}.$$

Die Nebenbedingung ist äquivalent zu $z(x+y-1) = x+y-xy$. Wäre $x+y = 1$, dann auch $xy = 1$ und x, y sind beide positiv. Daraus folgte aber $1 = x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2$, ein Widerspruch. Somit können wir $z = (x+y-xy)/(x+y-1)$ in der Ungleichung substituieren und erhalten

$$\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{(y+1)^2}{y^2+1} \geq \frac{(xy-1)^2}{(x+y-1)^2 + (x+y-xy)^2}. \tag{5}$$

Nach CS ist die linke Seite mindestens gleich

$$\frac{\big(|x+1||y-1| + |y+1||x-1|\big)^2}{(y-1)^2(x^2+1) + (x-1)^2(y^2+1)} \geq \frac{4(xy-1)^2}{(y-1)^2(x^2+1) + (x-1)^2(y^2+1)}, \tag{6}$$

und ein Vergleich von (5) und (6) zeigt, dass wir noch Folgendes beweisen müssen:

$$4(x+y-1)^2 + 4(x+y-xy)^2 \geq (y-1)^2(x^2+1) + (x-1)^2(y^2+1).$$

Nach Ausmultiplizieren und Vereinfachen lässt sich dies umschreiben zu

$$\left(xy - \tfrac{3}{2}x - \tfrac{3}{2}y - 1\right)^2 + \tfrac{3}{4}(x+y)^2 + 1 \geq 0,$$

was sicher stimmt. Damit ist alles gezeigt, Gleichheit gilt nur für Permutationen von $(x, y, z) = (1, -1, -1)$.

2. Lösung

Die Ungleichung besitzt die äquivalente Form

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{(z+1)^2}{2(z^2+1)} \geq 0,$$

sowie die beiden dazu analogen. Daraus folgt sofort, dass sie richtig ist, sobald zwei der drei Variablen nichtnegativ sind. Allgemeiner gilt die ursprüngliche Ungleichung sogar bereits dann, wenn die Summe von zwei der drei Terme auf der linken Seite nichtnegativ ist. Wir können also einerseits $y, z < 0$ annehmen und müssen andererseits wegen

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow (a+b)(ab+1) \geq 0$$

nur ausschliessen, dass die beiden Abschätzungen

$$(x+y)(xy+1) < 0, \tag{7}$$
$$(x+z)(xz+1) < 0, \tag{8}$$

gleichzeitig erfüllt sein können. Wir setzen $u = -y > 0$ und $v = -z > 0$ und erhalten mit der Nebenbedingung $x = \frac{u+v+uv}{u+v+1} > 0$. Substituiert man das in (7) und multipliziert mit $(u+v+1)^2$, dann folgt $(v-u^2)^2 + (u+1)(v-u^2)(1-uv) < 0$. Wegen $(v-u^2)^2 \geq 0$ und $u+1 > 0$ gilt also insbesondere die erste der beiden Ungleichungen

$$(v-u^2)(1-uv) < 0,$$
$$(u-v^2)(1-uv) < 0,$$

die zweite folgt analog aus (8). Wir unterscheiden nun zwei Fälle. Ist $uv > 1$, dann gilt $v > u^2$ und $u > v^2$. Wegen $u > v^2 > u^4$ ist aber $u < 1$ und wegen $v > u^2 > v^4$ ist $v < 1$ im Widerspruch zur Annahme $uv > 1$. Im Fall $uv < 1$ erhält man ähnlich den Widerspruch $u, v > 1$.

3. Lösung

Wir führen elementarsymmetrische Polynome ein, nämlich $u = x+y+z = xy+yz+zx$ und $w = xyz$. Hochmultiplizieren der Nenner und Vereinfachen liefert die äquivalente Ungleichung

$$4u^2 + w^2 - 6w + 1 \geq 0.$$

Zudem erhält man durch Addition der drei Ungleichungen

$$x^2y^2 + z^2 \geq 2xyz, \quad y^2z^2 + x^2 \geq 2xyz, \quad z^2x^2 + y^2 \geq 2xyz$$

die Abschätzung

$$2(u^2 - u - uw) \geq 6w.$$

Damit folgt wie gewünscht

$$4u^2 + w^2 - 6w + 1 \geq 2u^2 + 2uw + 2u + w^2 + 1 = (u + w)^2 + (u + 1)^2 \geq 0.$$

Dieses Argument lässt sich auch in die folgende Form komprimieren: Nach Hochmultiplizieren der Nenner und Umformen ist die Ungleichung äquivalent zu

$$(xy - z)^2 + (yz - x)^2 + (zx - y)^2 + (x + y + z + xyz)^2 + (x + y + z + 1)^2 \geq 0.$$

4. Lösung

Die Ungleichung ist der Spezialfall $w = -1$ der folgenden allgemeineren Aussage:

Für alle reellen Zahlen x, y, z, w mit $xy + xz + xw + yz + yw + zw = 0$ gilt

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} + \frac{w}{w^2+1} \geq -1.$$

Zum Beweis beachte man zuerst, dass dies sicher stimmt, wenn mindestens zwei der vier Variablen nichtnegativ sind. Wir können daher $x, y, z < 0$ annehmen. Schreibe die Ungleichung um zu

$$\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{(y+1)^2}{y^2+1} + \frac{(z+1)^2}{z^2+1} \geq \frac{(w-1)^2}{w^2+1}.$$

Einerseits können wir wegen der Nebenbedingung $w = -\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}$ substituieren und erhalten für die rechte Seite den Ausdruck

$$\frac{(xy + yz + zx + x + y + z)^2}{(xy + yz + zx)^2 + (x + y + z)^2}.$$

Andererseits ist die linke Seite nach CS mindestens

$$\frac{\big(|x+1||y| + |y+1||z| + |z+1||x|\big)^2}{(x^2+1)y^2 + (y^2+1)z^2 + (z^2+1)x^2} \geq \frac{(xy + yz + zx + x + y + z)^2}{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Es genügt somit zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} (xy + yz + zx)^2 + (x + y + z)^2 &\geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\ \iff \quad 2xyz(x + y + z) + 2(xy + yz + zx) &\geq 0. \end{aligned}$$

Letzteres ist wegen $x, y, z < 0$ aber klar.