

# SMO Finalrunde 2009

erste Prüfung - 13. März 2009

Zeit: 4 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei  $P$  ein reguläres Sechseck. Für einen Punkt  $A$  seien  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_6$  die Abstände von  $A$  zu den sechs Eckpunkten von  $P$ , der Grösse nach geordnet. Finde den geometrischen Ort aller Punkte  $A$  im Innern oder auf dem Rand von  $P$ , sodass
  - (a)  $d_3$  den kleinstmöglichen Wert annimmt.
  - (b)  $d_4$  den kleinstmöglichen Wert annimmt.

2. Ein *Palindrom* ist eine natürliche Zahl, die im Dezimalsystem vorwärts und rückwärts gelesen gleich gross ist (z.B. 1129211 oder 7337). Bestimme alle Paare  $(m, n)$  natürlicher Zahlen, sodass

$$\underbrace{(11 \dots 11)}_m \cdot \underbrace{(11 \dots 11)}_n$$

ein Palindrom ist.

3. Seien  $a, b, c, d$  positive reelle Zahlen. Beweise die folgende Ungleichung, und bestimme alle Fälle, in denen das Gleichheitszeichen steht:

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0.$$

4. Sei  $n$  eine natürliche Zahl. Jedes Feld eines  $n \times n$ -Quadrates enthält eines von  $n$  verschiedenen Symbolen, sodass jedes der Symbole in genau  $n$  Feldern steht. Zeige, dass eine Zeile oder eine Spalte existiert, die mindestens  $\sqrt{n}$  verschiedene Symbole enthält.
5. Sei  $ABC$  ein Dreieck mit  $AB \neq AC$  und Inkreismittelpunkt  $I$ . Der Inkreis berühre  $BC$  bei  $D$ . Der Mittelpunkt von  $BC$  sei  $M$ . Zeige, dass die Gerade  $IM$  die Strecke  $AD$  halbiert.

# SMO Finalrunde 2009

zweite Prüfung - 14. März 2009

Zeit: 4 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Finde alle Funktionen  $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ , welche für alle  $x > y > z > 0$  die folgende Gleichung erfüllen:

$$f(x - y + z) = f(x) + f(y) + f(z) - xy - yz + xz.$$

7. Die Punkte  $A$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  und  $C$  liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden. Sei  $k_1$  der Kreis mit Mittelpunkt  $M_1$  durch  $A$  und  $k_2$  der Kreis mit Mittelpunkt  $M_2$  durch  $C$ . Die beiden Kreise schneiden sich in den Punkten  $E$  und  $F$ . Eine gemeinsame Tangente an  $k_1$  und  $k_2$  berühre  $k_1$  in  $B$  und  $k_2$  in  $D$ . Zeige, dass sich die Geraden  $AB$ ,  $CD$  und  $EF$  in einem Punkt schneiden.
8. Gegeben ist ein Bodengrundriss, der aus  $n$  Einheitsquadraten zusammengesetzt ist. Albert und Berta möchten diesen Boden mit Kacheln bedecken, wobei alle Kacheln die Form eines  $1 \times 2$ -Dominos oder eines T-Tetrominos haben. Albert hat nur Kacheln von einer Farbe zur Verfügung, Berta hingegen hat Dominos in zwei Farben und Tetrominos in vier Farben zur Verfügung. Albert kann diesen Bodengrundriss in  $a$  Arten mit Kacheln bedecken, Berta auf  $b$  Arten. Unter der Annahme, dass  $a \neq 0$  gilt, bestimme das Verhältnis  $b/a$ .

9. Finde alle injektiven Funktionen  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , sodass für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt

$$f(f(n)) \leq \frac{f(n) + n}{2}.$$

10. Sei  $n > 3$  eine natürliche Zahl. Beweise, dass  $4^n + 1$  einen Primteiler  $> 20$  besitzt.