

SMO - Vorrunde

Bern, Zürich - 15. Januar 2005

Zeit: 2 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei $ABCD$ ein Rechteck mit $|AD| \leq |AB|$. Sei M der Mittelpunkt der Strecke AD und N der Mittelpunkt der Strecke BC . Der Punkt E sei die Projektion von B auf die Gerade CM .

(a) Zeige, dass $ANEM$ ein gleichschenkliges Trapez ist.

(b) Zeige, dass die Fläche des Vierecks $ABNE$ halb so gross ist, wie die Fläche von $ABCD$.

2. Zeige, dass es in jedem konvexen 9-Eck zwei verschiedene Diagonalen gibt, sodass die beiden Geraden, auf denen diese Diagonalen liegen, entweder parallel sind, oder sich in einem Winkel von weniger als 7° schneiden.

3. Seien m und n teilerfremde natürliche Zahlen. Zeige, dass dann auch die beiden Zahlen

$$m^3 + mn + n^3 \quad \text{und} \quad mn(m + n)$$

teilerfremd sind.

4. Sei ABC ein Dreieck mit $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Finde alle Punkte P im Innern dieses Dreiecks mit folgender Eigenschaft:

Ist D die Projektion von P auf die Gerade BC , E die Projektion von P auf CA und F die Projektion von P auf AB , dann gilt $\sphericalangle EDF = 30^\circ$.

5. Sei M eine Menge mit n Elementen. Bestimme die Anzahl Möglichkeiten, drei Teilmengen A, B, C von M auszuwählen, sodass gilt

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad B \cap C \neq \emptyset, \quad C \cap A \neq \emptyset,$$

$$A \cap B \cap C = \emptyset.$$

Viel Glück!