IMO Selektion 2004 Lösungen

1. Sei S die Menge aller n-Tupel $(X_1, \ldots, X_n)$, wobei $X_1, \ldots, X_n$ Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ sind, die nicht alle verschieden sein müssen, und die auch leer sein können. Für $a = (X_1, \ldots, X_n) \in S$ bezeichne

$$E(a) = \text{Anzahl Elemente von } X_1 \cup \ldots \cup X_n.$$

Finde einen expliziten Ausdruck für die Summe

$$\sum_{a \in S} E(a).$$

1. Lösung

Wir zählen die Anzahl Paare (a, x) auf zwei Arten, wobei $a = (X_1, \ldots, X_n) \in S$ ein n-Tupel ist und $x \in X_1 \cup \ldots \cup X_n$.

(a) Für ein festes $a \in S$ gibt es per Definition genau $E(a)$ solche Elemente x. Daher ist die gesuchte Anzahl gerade

$$\sum_{a \in S} E(a).$$

(b) Es gibt 1000 Möglichkeiten, ein Element $x \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ auszuwählen. Wieviele n-Tupel $(X_1, \ldots, X_n)$ gibt es mit $x \in X_1 \cup \ldots \cup X_n$? Jede der Teilmengen X_k kann x enthalten oder nicht, aber x muss in mindestens einer dieser Teilmengen liegen. Für jedes andere Element $y \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ und jedes k kann man frei entscheiden, ob y in X_k liegt, oder nicht. Insgesamt gibt es also $(2^n - 1) \cdot (2^n)^{999}$ verschiedene solche n-Tupel. Die gesuchte Anzahl ist daher

$$1000(2^n - 1)2^{999n}.$$

2. Lösung

Sei $0 \leq r \leq 1000$ fest. Wir zählen die Anzahl n-Tupel $a = (X_1, \ldots, X_n)$ mit $E(a) = r$. Es gibt $\binom{1000}{r}$ k-elementige Teilmengen M von $\{1, 2, \ldots, 1000\}$. Wieviele verschiedene n-Tupel $(X_1, \ldots, X_n)$ gibt es mit $M = X_1 \cup \ldots \cup X_n$? Nun, jedes der r Elemente von M kann in jeder der Mengen X_k enthalten sein, oder nicht, es muss aber in mindestens einer der Mengen X_k liegen. daher gibt es genau $(2^n - 1)^r$ verschiedene solche n-Tupel.

Zusammengefasst gibt es also genau $\binom{1000}{r}(2^n-1)^r$ verschiedene n-Tupel $a \in S$ mit $E(a) = r$. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{a\in S} E(a) &= \sum_{r=0}^{1000} r \cdot \binom{1000}{r}(2^n-1)^r \\
&= \sum_{r=1}^{1000} 1000 \binom{999}{r-1}(2^n-1)^r = 1000(2^n-1)\sum_{r=1}^{1000}\binom{999}{r-1}(2^n-1)^{r-1} \\
&= 1000(2^n-1)\sum_{r=0}^{999}\binom{999}{r}(2^n-1)^r = 1000(2^n-1)((2^n-1)+1)^{999} \\
&= 1000(2^n-1)2^{999n}.
\end{aligned}$$

2. Bestimme die grösste natürliche Zahl n, sodass

$$4^{995} + 4^{1500} + 4^n$$

eine Quadratzahl ist.

1. Lösung

Antwort: $n = 2004$

Wir zeigen allgemeiner: Sind $a < b$ zwei natürliche Zahlen, dann ist $n = 2b - a - 1$ der grösste Wert, für den $4^a + 4^b + 4^n$ eine Quadratzahl ist.

Sei zunächst $n = 2b - a - 1$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
4^a + 4^b + 4^n &= 4^a(1 + 4^{b-a} + 4^{2(b-a)-1}) \\
&= (2^a)^2 \cdot (1 + 2^{2(b-a)-1})^2,
\end{aligned}$$

also eine Quadratzahl. Wir nehmen nun an, es gelte $n \geq 2b - a$. Wegen $4^a + 4^b + 4^n = (2^a)^2 \cdot (1 + 4^{b-a} + 4^{n-a})$ genügt es zu zeigen, dass $A = 1 + 4^{b-a} + 4^{n-a}$ kein Quadrat ist. Einerseits gilt $A > (2^{n-a})^2$, andererseits wegen $2b - 2a < n - a + 1$ aber auch

$$\begin{aligned}
A &= 1 + 2^{2b-2a} + (2^{n-a})^2 \\
&< 1 + 2 \cdot 2^{n-a} + (2^{n-a})^2 = (2^{n-a}+1)^2.
\end{aligned}$$

Damit liegt A zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen, kann also nicht selbst eine sein.

2. Lösung

Wir geben einen zweiten Beweis dafür, dass A für $n \geq 2b - a$ keine Quadratzahl ist.

$A = 4^a(1+4^{b-a}+4^{n-a})$ ist genau dann eine Quadratzahl, wenn der zweite Faktor eine ist. Nehme also an, $1+4^{b-a}+4^{n-a} = s^2$, dann ist s ungerade und wegen $n > b$ ist $4^{b-4} = 2^{2b-2a}$ die grösste Zweierpotenz, die $s^2-1 = (s-1)(s+1)$ teilt. Nun sind $s-1$ und $s+1$ zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen, also ist eine davon durch 2 und die andere durch $2^{2b-2a-1}$ teilbar. Schreibe $s = 2^{2b-2a-1}r \pm 1$, mit r ungerade. Dann gilt

$$1+4^{b-a}+4^{n-a} = s^2 = 4^{2b-2a-1}r^2 \pm 2^{2b-2a}r + 1.$$

Umformen und Faktorisieren liefert

$$(\pm r - 1) = 4^{b-a-1}(2^{n-(2b-a-1)} - r)(2^{n-(2b-a-1)} + r).$$

Nach Voraussetzung an n, und weil r ungerade ist, verschwindet die rechte Seite nicht und daher gilt

$$2^{n-(2b-a-1)} + r \leq |\pm r - 1|.$$

Daraus folgt wiederum $2^{n-(2b-a-1)} \leq 1$, im Widerspruch zu $n \geq 2b-a$.

3. Lösung

Wir nehmen an, $4^a + 4^b + 4^n$ sei ein Quadrat. Wir machen den Ansatz

$$(2^n + 2^k r)^2 = 4^a + 4^b + 4^n,$$

wobei $k \geq 0$ und r ungerade ist. Ausmultiplizieren ergibt

$$2^k r(2^{n+1} + 2^k r) = 4^a + 4^b.$$

Die rechte Seite ist konstant. Wenn man r festhält, und n grösser macht, wird k kleiner und umgekehrt. Da wir den grösstmöglichen Wert von n suchen, können wir annehmen, dass $n > k-1$ ist (genauer: Falls es ein n mit dieser Nebenbedingung gibt, dann kann für das grösste n sicher nicht $n \leq k-1$ gelten). Umformen liefert

$$4^k r(2^{n-k+1} + 1) = 4^a(4^{b-a} + 1).$$

Nach Konstruktion sind die beiden Klammern ungerade, und daher ist 4^k die grösste Zweierpotenz, die die linke Seite teilt, und 4^a ist die grösste solche, die die rechte Seite teilt. Dies liefert $k = a$. Nun lassen wir r variieren und sehen, dass n grösser wird, wenn r kleiner wird und umgekehrt. Das heisst, falls ein n existiert mit $r = 1$, dann muss es das grösste sein. Also probieren wir das aus: Mit $r = 1$ und $k = a$ folgt aus obiger Gleichung

$$2^{n-a+1} + 1 = 4^{b-a} + 1,$$

Also $n = 2b-a-1$. Dies muss das maximale n sein.

3. Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AC| = |BC|$ und Inkreismittelpunkt I. Sei P ein Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks AIB, der Im Dreieck ABC liegt. Die Geraden durch P, parallel zu CA und CB, schneiden AB in D und E. Die zu AB parallele Gerade durch P schneidet CA und CB in F und G. Zeige, dass sich die beiden Geraden DF und EG auf dem Umkreis des Dreiecks ABC schneiden.

Lösung

Die entsprechenden Seiten der Dreiecke PDE und CFG sind parallel. Falls DF und EG nicht parallel sind, gehen diese beiden Dreiecke durch eine Streckung auseinander hervor und DF, EG und CP schneiden sich im Streckzentrum. Dies führt zu folgendem

Satz 1. *Sei Q der Schnittpunkt von CP mit dem Umkreis von ABC. Dann schneiden sich DF und EG in Q.*

Proof. Aus $\sphericalangle AQP = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = \sphericalangle PFC$ folgt, dass $AQPF$ ein Sehnenviereck ist. Daher gilt $\sphericalangle FQP = \sphericalangle PAF$. Wegen $\sphericalangle IBA = \sphericalangle CBA/2 = \sphericalangle CAB/2 = \sphericalangle IAC$ berührt der Umkreis des Dreiecks AIB die Gerade CA in A. Daraus folgt $\sphericalangle PAF = \sphericalangle DBP$. Wegen $\sphericalangle QBD = \sphericalangle QCA = \sphericalangle QPD$ ist auch $DQBP$ ein Sehnenviereck, also gilt $\sphericalangle DBP = \sphericalangle DQP$.
Setzt man alles zusammen, dann folgt $\sphericalangle FQP = \sphericalangle PAF = \sphericalangle DBP = \sphericalangle DQP$, also sind F, D, Q kollinear. Analog folgt, dass G, E, Q kollinear sind. $\square$

Also schneiden sich die Geraden DF, EG und CP auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.

4. Für die positiven reellen Zahlen a, b, c gelte $abc = 1$. Beweise die folgende Ungleichung:

$$\frac{ab}{a^5 + ab + b^5} + \frac{bc}{b^5 + bc + c^5} + \frac{ca}{c^5 + ca + a^5} \leq 1.$$

1. Lösung

Es gilt $a^5 + b^5 \geq a^2b^2(a + b)$, z.B. nach AM-GM oder Bunching. Daraus folgt mit $abc = 1$

$$\frac{ab}{a^5 + ab + b^5} \leq \frac{ab}{a^2b^2(a + b) + ab} = \frac{abc^2}{a^2b^2c^2(a + b) + abc^2} = \frac{c}{a + b + c}.$$

Nach dieser und den analogen Abschätzungen ist die linke Seite höchstens gleich

$$\frac{c}{a + b + c} + \frac{a}{a + b + c} + \frac{b}{a + b + c} = 1.$$

2. Lösung

Mit der Nebenbedingung $abc = 1$ lässt sich die Ungleichung homogenisieren:

$$\frac{ab}{a^5 + a^2b^2c + b^5} + \frac{bc}{b^5 + ab^2c^2 + c^5} + \frac{ca}{c^5 + a^2bc^2 + a^5} \leq \frac{1}{abc}.$$

Multipliziert man beide Seiten mit dem Hauptnenner und multipliziert aus, wird die linke Seite zu

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{sym}} a^{11}b^2c^2 + 4a^8b^4c^3 + a^7b^7c + 2a^7b^6c^2 + a^5b^5c^5.$$

Die rechte Seite ist gleich

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{sym}} a^{11}b^2c^2 + 2a^{10}b^5 + 2a^8b^4c^3 + a^7b^7c + 2a^7b^6c^2 + a^5b^5c^5.$$

Nach Vereinfachen ist die ursprüngliche Ungleichung also äquivalent zu

$$\sum_{\text{sym}} a^{10}b^5 - a^8b^4c^3 \geq 0,$$

was nach Bunching richtig ist.

5. Ein *Bauklotz*, bestehend aus 7 Einheitswürfeln, hat die Form eines $2 \times 2 \times 2$ Würfels mit einem fehlenden Eckeinheitswürfel. Aus einem Würfel der Kantenlänge 2^n, $n \geq 2$, wird ein beliebiger Einheitswürfel entfernt. Zeige, dass sich der verbleibende Körper stets aus Bauklötzen aufbauen lässt.

Lösung

Man überlegt sich leicht, dass man aus 8 Bauklötzen einen doppelt so grossen Bauklotz herstellen kann. Induktiv folgt daraus, dass man für jedes $n \geq 1$ einen Bauklotz der Kantenlänge 2^n herstellen kann. Wir nennen dies einen n-Klotz. Betrachte nun einen Würfel der Kantenlänge 2^n mit einem fehlenden Einheitswürfel. Um ihn nachzubauen, betrachten wir einen leeren Würfel der gleichen Grösse, in dem der entsprechende Einheitswürfel markiert ist. Man platziere nun einen n-Klotz in diesem leeren Würfel, sodass der markierte Einheitswürfel nicht überdeckt ist (dies geht auf genau eine Art). Es bleibt ein Würfel der Kantenlänge 2^{n-1} mit einem markierten Einheitswürfel übrig. Nun kann man wieder einen $n-1$-Klotz so platzieren, dass der markierte Einheitswürfel nicht bedeckt wird. So fortfahrend, lässt sich der gesamte Würfel nachbauen, sodass nur der markierte Einheitswürfel nicht bedeckt ist. Dies war zu zeigen.

6. Bestimme alle endlichen Folgen $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ reeller Zahlen, sodass die Zahl k in der Folge genau x_k mal auftritt.

Lösung

Beachte zuerst, dass alle Folgeglieder nichtnegative ganze Zahlen $\leq n+1$ sind, da x_k das Auftreten von k in der Folge zählt und die Länge der Folge $n+1$ ist. Ausserdem ist $x_k = n+1$ unmöglich, denn sonst wären alle Folgeglieder gleich k, also auch x_k, Widerspruch. Daher gilt $x_k \leq n$ für alle k. Die Summe aller Folgeglieder ist gleich $0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 + \ldots + n \cdot x_n$, da genau x_k davon gleich k sind. Dies liefert

$$\sum_{k=0}^{n} k x_k = \sum_{k=0}^{n} x_k. \tag{1}$$

Für das Folgende halte man sich stets vor Augen, dass aus $x_l = k > 0$ folgt, dass $x_k > 0$ gilt. Ausserdem ist $x_0 > 0$, denn $x_0 = 0$ kann nicht sein. Sei nun m die grösste Zahl, sodass gilt $x_m \neq 0$. Dann folgt insbesondere $x_k \leq m$ für alle k. Wegen $x_0 \neq 0$ ist $m \geq 1$. Nehme an, es gelte $m = 1$, dann muss $x_0 = x_1 = 1$ sein, was nicht möglich ist. Daher ist $m \geq 2$. Aus (1) folgt nun die Gleichung

$$x_0 = x_2 + 2x_3 + \ldots + (m-1)x_m.$$

Die rechte Seite ist mindestens gleich $(m-1)x_m$. Zusammen mit $x_0 \leq m$ ergeben sich vier mögliche Fälle: (a) $m = 2$, $x_0 = x_2 = 2$, (b) $m = 2$, $x_0 = x_2 = 1$, (c) $m \geq 3$, $x_0 = m-1$, $x_m = 1$, $x_k = 0$ für $k \neq 0, 1, m$ und (d) $m \geq 3$, $x_0 = m$, $x_2 = 1$, $x_m = 1$, $x_k = 0$ für $k \neq 0, 1, 2, m$. Wir betrachten diese nun einzeln.

(a) Es muss $x_1 \leq 1$ gelten. $x_1 = 0$ liefert die Folge $(2, 0, 2, 0)$ und $x_1 = 1$ die Folge $(2, 1, 2, 0, 0)$.

(b) Aus $x_2 = 1$ folgt $x_1 = 2$. Dies ergibt die Folge $(1, 2, 1, 0)$.

(c) Wegen $x_m > 0$ muss m in der Folge vorkommen, daher ist $x_1 = m$. Damit müssten aber $m \geq 3$ Einsen in der Folge zu finden sein, was nicht der Fall ist, Widerspruch.

(d) Es gilt $x_1 = 2$, was zur Folge $(m, 2, 1, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m-3}, 1, 0, 0, 0)$ führt.

Als Lösungen erhalten wir also die drei speziellen Folgen

$$(1, 2, 1, 0), \quad (2, 0, 2, 0), \quad (2, 1, 2, 0, 0),$$

sowie die unendliche Familie

$$(m, 2, 1, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m-3}, 1, 0, 0, 0), \qquad m \geq 3.$$

7. Für die rellen Zahlen a, b, c, d gelten die Gleichungen

$$a = \sqrt{45 - \sqrt{21 - a}} \quad , \qquad b = \sqrt{45 + \sqrt{21 - b}},$$
$$c = \sqrt{45 - \sqrt{21 + c}} \quad , \qquad d = \sqrt{45 + \sqrt{21 + d}}.$$

Zeige, dass gilt $abcd = 2004$.

Lösung

durch zweimaliges Quadrieren folgt für a die Gleichung $(a^2 - 45)^2 + a - 21 = 0$, daher ist a eine Nullstelle des Polynoms

$$P(x) = x^4 - 90x^2 + x + 2004.$$

Dasselbe gilt für b. Analog findet man, dass c und d Nullstellen des Polynoms $x^4 - 90x^2 - x + 2004$ sind, folglich sind $-c$ und $-d$ ebenfalls Nullstellen von P. Ausserdem sind die 4 Zahlen $a, b, -c, -d$ paarweise verschieden, denn a und b sind positiv, $-c$ und $-d$ negativ. Wäre $a = b$, dann folgt aus der Gleichung für a die Identität $a^2 - 45 = -\sqrt{21 - a}$, aus jener für b jedoch $a^2 - 45 = \sqrt{21 - a}$. Es wäre also gleichzeitig $a^2 = 45$ und $a = 21$, was unmöglich ist. Analog zeigt man, dass $c = d$ auf einen Widerspruch führt. Folglich ist $abcd = ab(-c)(-d)$ das Produkt der vier Nullstellen von P, dieses ist nach Vieta gleich dem konstanten Koeffizienten, also gleich 2004.

8. Sei m eine natürliche Zahl grösser als 1. Die Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ist definiert durch

$$x_i = \begin{cases} 2^i, & \text{für} \quad 0 \leq i \leq m - 1; \\ \sum_{j=1}^{m} x_{i-j} & \text{für} \quad i \geq m. \end{cases}$$

Finde das grösste k, sodass es k aufeinanderfolgende Folgeglieder gibt, die alle durch m teilbar sind.

Lösung

Sei r_i der Rest von x_i bei Division durch m. Wir betrachten statt der Folge (x_i) die Folge (r_i). Mit Hilfe der Rekursionsformel lassen sich aus m aufeinanderfolgenden Folgegliedern das nächste, aber auch das vorhergehende ausrechnen. Solche m aufeinanderfolgende Glieder bestimmen daher die ganze Folge. Wegen $0 \leq r_i \leq m - 1$ gibt es höchstens m^m verschiedene m-Tupel $(r_i, r_{i+1}, \ldots, r_{i+m-1})$ aufeinanderfolgender Folgeglieder. Nach dem Schubfachprinzip kommt eines dieser m-Tupel mehrfach in der Folge vor. Daraus folgt, dass die Folge periodisch ist ohne Vorperiode (man kann die Glieder rückwärts berechnen).
Nehme an, dass m aufeinanderfolgende x_i durch m teilbar sind. Dann enthält die Folge

(r_i) m aufeinanderfolgende Nullen und aus der Rekursionsformel folgt, dass alle Folgeglieder gleich Null sind, im Widerspruch zu $x_0 = r_0 = 1$.
Andererseits lässt sich die Folge x_i rückwärts über x_0 hinaus fortsetzen. Die Formel $x_i = x_{i+m} - \sum_{j=1}^{m-1} x_{i+j}$ liefert nun leicht $x_{-1} = 1$ und weiter $x_{-2} = x_{-3} = \ldots = x_{-m} = 0$. Wegen der Periodizität von (r_i) gibt es daher $m-1$ aufeinanderfolgende Glieder in $(x_i)_{i \geq 0}$, die durch m teilbar sind.

9. Sei X eine Menge mit n Elementen und seien $A_1, A_2, \ldots A_n$ verschiedene Teilmengen von X. Zeige: Es gibt ein $x \in X$, sodass die Mengen

$$A_1 \setminus \{x\}, A_2 \setminus \{x\}, \ldots, A_n \setminus \{x\}$$

alle verschieden sind.

1. Lösung

Nehme an, dies sei nicht der Fall. Dann gibt es für jedes Element $x \in X$ zwei Teilmengen A_i und A_j, sodass $A_i \setminus \{x\} = A_j \setminus \{x\}$ (eventuell gibt es mehrere solche Paare, wir wählen ein beliebiges aus und halten es im Folgenden fest). Da A_i und A_j verschieden sind, folgt daraus, dass beide Mengen dieselben Elemente enthalten, ausser dass x in genau einer der beiden Mengen liegt. Wir betrachten nun einen Graphen, dessen Ecken die Mengen A_k sind. Für jedes $x \in X$ wählen wir wie oben beschrieben zwei Teilmengen, von denen die eine x enthält und die andere nicht, die aber ansonsten dieselben Elemente enthalten, und verbinden sie mit einer Kante. Man überlegt sich leicht, dass keine zwei Teilmengen mit mehr als einer Kante verbunden sein können, da verschiedene Kanten zu verschiedenen Elementen $x \in X$ gehören. Da dieser Graph n Ecken und n Kanten hat, besitzt er einen Zyklus (dies folgt leicht mit vollständiger Induktion). OBdA sei dieser Zyklus $A_1, A_2, ..., A_k, A_1$ und die Kante zwischen A_1 und A_2 gehöre zu x. Einerseits enthält nun genau eine der Mengen A_1 und A_2 das Element x, da sie ja durch diese Kante verbunden sind. Andererseits sind sie aber auch durch den Kantenzug über $A_3, \ldots, A_k$ verbunden. Keine dieser Kanten gehört zu x, also ändert sich der Zustand von x auf diesem Kantenzug nicht, und daher gehört x entweder zu beiden oder zu keiner der Mengen A_1, A_2, Widerspruch.

2. Lösung

Wir verwenden Induktion nach n, die Behauptung ist klar für $n = 2$. Sind die Mengen $A_1 \setminus \{x_n\}, \ldots, A_n \setminus \{x_n\}$ alle verschieden, sind wir fertig. Wir nehmen im Folgenden an, dies sei nicht der Fall. Gilt $A_i \setminus \{x_n\} = A_j \setminus \{x_n\}$, dann unterscheiden sich A_i und A_j nur um das Element x_n. Daraus folgt, dass nicht drei oder mehr Mengen nach Entfernung von x_n gleich werden können. Wir fassen nun die Teilmengen A_i einzeln oder paarweise in Gruppen zusammen, sodass die Mengen in einer Gruppe nach dem Entfernen von

x_n gleich werden. Nummeriere die verschiedenen auftretenden Mengen $A_i \setminus \{x_n\}$ in irgend einer Reihenfolge $B_1, \ldots, B_m$ mit $m \leq n-1$. Die B_i entsprechen genau den Gruppen der A_j. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein x_k mit $1 \leq k \leq n-1$, sodass $B_1 \setminus \{x_k\}, \ldots, B_m \setminus \{x_k\}$ alle verschieden sind (ergänze die Liste $B_1, \ldots, B_m$ gegebenenfalls durch weitere Mengen $B_{m+1}, \ldots, B_{n-1}$, falls $m < n-1$, sodass die B_i alle verschieden sind). Die Mengen $A_1 \setminus \{x_k\}, \ldots, A_n \setminus \{x_k\}$ sind nun paarweise verschieden: liegen A_i und A_j in verschiedenen Gruppen, dann sind nach Konstruktion ja sogar die Mengen $A_i \setminus \{x_k, x_n\}$ und $A_j \setminus \{x_k, x_n\}$ verschieden, liegen sie in derselben Gruppe, dann unterscheiden sich $A_i \setminus \{x_k\}$ und $A_j \setminus \{x_k\}$ um das Element x_n, sind also auch verschieden. Dies beendet den Beweis.

10. Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit Höhen $\overline{AU}$, $\overline{BV}$, $\overline{CW}$ und Höhenschnittpunkt H. X liege auf $\overline{AU}$, Y auf $\overline{BV}$ und Z auf $\overline{CW}$. X, Y und Z sind alle von H verschieden. Zeige

(a) Wenn X, Y, Z und H auf einem Kreis liegen, gilt

$$[ABC] = [ABZ] + [AYC] + [XBC],$$

wobei $[PQR]$ die Fläche des Dreiecks $\triangle PQR$ bezeichnet.

(b) Es gilt auch die Umkehrung von (a).

Lösung

(a) Da das Sehnenviereck $XYZH$ insbesondere konvex ist, können wir oBdA annehmen, dass Z auf $\overline{CH}$ und X auf $\overline{HU}$ liegt. Wir betrachten zuerst den Fall, dass Y auf $\overline{BH}$ liegt. Eine kurze Winkeljagd zeigt, dass $\sphericalangle XYZ = \beta$ und $\sphericalangle YZX = \gamma$ gilt. Es folgt, dass die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle XYZ$ ähnlich sind und daraus folgt

$$XY = YZ \cdot \frac{AB}{BC} \qquad ZX = YZ \cdot \frac{CA}{BC}$$

Nach dem Satz von Ptolemäus für Sehnenvierecke gilt

$$HX \cdot YZ = HY \cdot ZX + HZ \cdot XY.$$

Einsetzen, kürzen und umformen gibt

$$\begin{aligned} HX \cdot BC &= HY \cdot CA + HZ \cdot AB \\ \Leftrightarrow \quad (UH - UX) \cdot BC &= (VY - VH) \cdot CA + (WZ - WH) \cdot AB \\ \Leftrightarrow \quad AB \cdot WH + BC \cdot UH + CA \cdot VH &= AB \cdot WZ + BC \cdot UX + CA \cdot VY \\ \Leftrightarrow \quad [ABC] &= [ABZ] + [AYC] + [XBC]. \end{aligned}$$

Für den Fall, dass Y auf $\overline{VH}$ liegt, liefert Winkeljagd erneut dieselbe Ähnlichkeit. Ptolemäus hat dann die Form

$$HZ \cdot XY = HY \cdot ZX + HX \cdot YZ.$$

und liefert durch analoge Berechnung die gesuchte Gleichung.

(b) Wir nehmen an X, Y, Z und H liegen nicht auf einem Kreis. Betrachte den Umkreis k des Dreiecks $\triangle XYH$. Wir unterscheiden drei Fälle:

(i) k schneidet die Strecke $\overline{CW}$ in den Punkten H und S. Für das Sehnenviereck $XYSH$ gilt, wie in (a) gezeigt wurde, die Gleichung. Liegt nun Z näher bei W als S, ist die Fläche $[ABZ]$ kleiner als $[ABS]$ und somit

$$[ABZ] + [AYC] + [XBC] < [ABC],$$

Widerspruch. Analog, wenn Z näher bei C liegt als S.

(ii) k liegt tangetial an CW. Winkeljagd zeigt, dass das Dreieck $\triangle XYH$ ähnlich zu $\triangle ABC$ ist. Es gilt darum in allen Fällen

$$\begin{aligned} \frac{HX}{YH} &= \frac{CA}{BC} \\ \Leftrightarrow \ [ABC] &= [ABH] + [AYC] + [XBC]. \end{aligned}$$

Die gleiche Argumentation, wie in Fall (i) führt zum gewünschten Widerspruch.

(iii) k schneidet CW ausserhalb $\overline{CW}$ in S. Wir setzen $[ABS]$ negativ (gleicher Betrag), falls S näher bei W liegt als bei C. Man prüft leicht nach, dass dann die Gleichung aus (a) auch für Punkte ausserhalb von $\triangle ABC$ gilt. Das gleiche Argument, wie in Fall (i) ergibt den Widerspruch.

11. Finde alle injektiven Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle reellen Zahlen $x \neq y$ gilt

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{f(x) - f(y)}.$$

Lösung

Einsetzen von $y = 0$ liefert für $x \neq 0$ die Gleichung $f(1) = (f(x) + f(0))/(f(x) - f(0))$, also

$$f(x)(f(1) - 1) = f(0)(f(1) + 1).$$

Daraus folgt $f(1) = 1$ und damit auch $f(0) = 0$, denn sonst wäre f konstant auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, also nicht injektiv. Setze $y = -x \neq 0$, dann folgt

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \neq 0. \tag{2}$$

Setze $y = xz$ mit $z \neq 1$ und $x \neq 0$, dann gilt einerseits

$$f\left(\frac{x+xz}{x-xz}\right) = \frac{f(x)+f(xz)}{f(x)-f(xz)}, \tag{3}$$

andererseits ist aber auch

$$f\left(\frac{x+xz}{x-xz}\right) = f\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1+f(z)}{1-f(z)}. \tag{4}$$

Ein Vergleich von (3) und (4) ergibt nun für alle $z \neq 1$ und $x \neq 0$ die Gleichung

$$f(xz) = f(x)f(z). \tag{5}$$

Wir wissen aber bereits, dass $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ gilt, also stimmt (5) für alle reellen x, z. Mit $x = z$ folgt aus (5) weiter, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$. Da f injektiv ist und $f(0) = 0$, gilt sogar $f(x) > 0$ für alle $x > 0$. Ist nun $x > y \geq 0$, dann gilt $(x+y)/(x-y) > 0$ und damit ist die linke Seite der ursprünglichen Gleichung positiv, also auch die rechte. Dies gilt auch für den Zähler rechts, also auch für den Nenner, das heisst $f(x) > f(y)$, und daher ist f streng monoton steigend auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Zusammen mit (5) impliziert das bekanntlich, dass für $x \geq 0$ gilt $f(x) = x^c$ mit einer positiven Konstanten c. Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung (wobei $x > y \geq 0$) zeigt, dass $c = 1$ sein muss. Zusammen mit (2) ergibt sich nun die einzige Lösung

$$f(x) = x.$$

12. Finde alle natürlichen Zahlen, die sich in der Form

$$\frac{(a+b+c)^2}{abc}$$

darstellen lassen, wobei a, b und c natürliche Zahlen sind.

Lösung

Nehme an, die natürliche Zahl n lasse sich in dieser Form darstellen, also

$$\frac{(a+b+c)^2}{abc} = n.$$

Halte n fest und wähle a, b, c mit $a \geq b \geq c$ und $a+b+c$ minimal. Die obige Gleichung lässt sich umschreiben zu

$$a^2 + a(2b + 2c - nbc) + (b+c)^2 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in a, die eine weitere Lösung a' besitzt. Nach Vieta gilt

$$\begin{aligned} a + a' &= nbc - 2b - 2c, \\ a \cdot a' &= (b+c)^2. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass a' ganz ist, aus der zweiten, dass $a' > 0$. Wegen der Minimalität von $a+b+c$ muss $a' \geq a$ sein und daher gilt $a^2 \leq aa' = (b+c)^2$, also $b + c \geq a \geq b \geq c > 0$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

(a) Sei $c = 1$. Dann ist $a = b$ oder $a = b+1$. Im ersten Fall folgt $a^2 \mid (1+2a)^2$, also $a^2 \mid 1 + 4a$. Dies gilt nur für $a = 1$, was zu $n = 9$ führt. Im zweiten Fall gilt $a(a-1) \mid (2a)^2$, also ist $a = 2, 3, 5$ und $n = 8, 6, 5$.

(b) Sei nun $c > 1$. Dann gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} n = \frac{(a+b+c)^2}{abc} &= \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{b+c}{bc} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + 2 \cdot \frac{3}{2} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3 = 5. \end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass für $b, c \geq 2$ gilt $b + c \leq bc$.

Es kommen also nur $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$ in Frage. Die folgende Auflistung zeigt, dass alle diese Zahlen in der gewünschten Form dargestellt werden können:

$$\begin{array}{ll} 1 = (9+9+9)^2/(9 \cdot 9 \cdot 9) & 5 = (5+4+1)^2/(5 \cdot 4 \cdot 1) \\ 2 = (8+4+4)^2/(8 \cdot 8 \cdot 4) & 6 = (3+2+1)^2/(3 \cdot 2 \cdot 1) \\ 3 = (3+3+3)^2/(3 \cdot 3 \cdot 3) & 8 = (2+1+1)^2/(2 \cdot 1 \cdot 1) \\ 4 = (4+2+2)^2/(4 \cdot 2 \cdot 2) & 9 = (1+1+1)^2/(1 \cdot 1 \cdot 1) \end{array}$$