

# Lösungen zur SMO Finalrunde 2004

erste Prüfung - 2. April 2004

1. Sei  $\Gamma$  ein Kreis und  $P$  ein Punkt ausserhalb von  $\Gamma$ . Eine Tangente von  $P$  an den Kreis berühre ihn in  $A$ . Eine weitere Gerade durch  $P$  schneide  $\Gamma$  in den verschiedenen Punkten  $B$  und  $C$ . Die Winkelhalbierende von  $\sphericalangle APB$  schneide  $AB$  in  $D$  und  $AC$  in  $E$ . Beweise, dass das Dreieck  $ADE$  gleichschenkelig ist.

## Lösung

Wir nehmen an,  $B$  liege näher bei  $P$  als  $C$ . Da  $PA$  eine Tangente an  $\Gamma$  ist, gilt  $\sphericalangle PAB = \sphericalangle ACB$ . Ausserdem ist  $\sphericalangle APD = \sphericalangle CPE$ , also sind die Dreiecke  $PAD$  und  $PEC$  ähnlich. Daraus folgt  $\sphericalangle PDA = \sphericalangle PEC$  und somit auch  $\sphericalangle ADE = \sphericalangle AED$ , also ist das Dreieck  $ADE$  gleichschenkelig.

2. Sei  $M$  eine endliche Menge reeller Zahlen mit folgender Eigenschaft: Aus je drei verschiedenen Elementen von  $M$  lassen sich stets zwei auswählen, deren Summe in  $M$  liegt. Wieviele Elemente kann  $M$  höchstens haben?

## Lösung

Antwort: 7.

Nehme an,  $M$  enthalte mehr als drei positive Elemente und bezeichne die vier grössten mit  $a > b > c > d > 0$ . Nach Voraussetzung kann man aus den drei Elementen  $a, b, c$  zwei auswählen, deren Summe in  $M$  liegt. Wegen  $a + b > a$  und  $a + c > a$  und der Maximalität von  $a$  liegen diese beiden Summen nicht in  $M$ . Folglich muss  $b + c \in M$  sein und wegen  $b + c > b$  gilt  $a = b + c$ . Dieselbe Argumentation mit den drei Elementen  $a, b, d$  zeigt, dass auch  $a = b + d$  gilt. Dies impliziert aber  $c = d$ , Widerspruch. Folglich enthält  $M$  höchstens drei positive Elemente. Analog zeigt man, dass  $M$  auch nur höchstens drei negative Elemente enthält. Daher gilt  $|M| \leq 7$  (die Null kann auch noch in  $M$  liegen).

Andererseits hat für  $a > 0$  die folgende 7-elementige Menge die geforderte Eigenschaft:

$$M = \{-3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a\}.$$

Die einzigen Summen von zwei verschiedenen Elementen, die nicht in  $M$  liegen, sind  $3a + a$ ,  $3a + 2a$ ,  $(-3a) + (-a)$  und  $(-3a) + (-2a)$ . Die einzigen problematischen dreielementige Teilmengen von  $M$  sind daher  $\{3a, b, -3a\}$ , wobei  $b = \pm a$  oder  $\pm 2a$ . Im Fall

$b > 0$  gilt aber  $(-3a) + b \in M$ , in Fall  $b < 0$  analog  $3a + b \in M$ . Damit ist alles gezeigt.

3. Sei  $p$  eine ungerade Primzahl. Finde alle natürlichen Zahlen  $k$ , sodass

$$\sqrt{k^2 - pk}$$

eine positive ganze Zahl ist.

### Lösung

Sei  $\sqrt{k^2 - pk} = m$  mit  $m > 0$  ganz. Dann gilt  $k(k - p) = m^2$ . Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

$p \mid k$  Dann ist auch  $m$  durch  $p$  teilbar. Schreibe  $k = p \cdot l$  und  $m = p \cdot n$ , dann folgt  $l(l - 1) = n^2$ . Wegen  $l \geq 2$  und

$$(l - 1)^2 < l^2 - l < l^2$$

liegt  $l(l - 1)$  aber zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen, kann also nicht selbst eine sein, Widerspruch.

$p \nmid k$  In diesem Fall sind  $k$  und  $k - p$  teilerfremd. Da ihr Produkt ein Quadrat ist, müssen beide Zahlen Quadrate sein:  $k = b^2$ ,  $k - p = a^2$ . Nun gilt

$$p = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a).$$

Da  $p$  prim ist, folgt  $1 = b - a$  und  $p = a + b$ . Daraus ergibt sich der einzige mögliche Wert  $k = ((p + 1)/2)^2$ . In der Tat ist für dieses  $k$

$$\sqrt{k^2 - pk} = \frac{p^2 - 1}{4}$$

eine positive ganze Zahl, denn es gilt  $p^2 \equiv 1 \pmod{4}$ .

4. Bestimme alle Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2.$$

### Lösung

Setze  $x = 0$ , dann folgt

$$f(f(y)) = y + f(0)^2, \tag{1}$$

insbesondere ist  $f$  surjektiv. Wähle  $a \in \mathbb{R}$  mit  $f(a) = 0$  und setze  $x = a$ :

$$f(f(y)) = y. \tag{2}$$

Ein Vergleich mit (1) zeigt ausserdem  $f(0) = 0$ . Einsetzen von  $y = 0$  liefert nun

$$f(xf(x)) = f(x)^2. \quad (3)$$

Substituiere  $x = f(z)$  in (3), dann folgt mit (2)

$$f(zf(z)) = z^2. \quad (4)$$

Aus (3) und (4) schliesslich erhält man  $f(x)^2 = x^2$ , also  $f(x) = \pm x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Nehme an, es gäbe zwei reelle Zahlen  $x, y \neq 0$  mit  $f(x) = x$  und  $f(y) = -y$ . Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung liefert

$$\pm(x^2 - y) = f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2 = y + x^2.$$

Gilt das Pluszeichen, dann folgt  $y = 0$ , im Widerspruch zur Annahme, gilt das Minuszeichen, dann folgt  $x = 0$ , was ebenfalls nicht sein darf. Daher können nur die Funktionen  $f(x) = x$  und  $f(x) = -x$  Lösungen sein. Durch Einsetzen bestätigt man leicht, dass beide die Funktionalgleichung erfüllen.

5. Seien  $a$  und  $b$  feste positive Zahlen. Finde in Abhängigkeit von  $a$  und  $b$  den kleinstmöglichen Wert der Summe

$$\frac{x^2}{(ay + bz)(az + by)} + \frac{y^2}{(az + bx)(ax + bz)} + \frac{z^2}{(ax + by)(ay + bx)},$$

wobei  $x, y, z$  positive reelle Zahlen sind.

### Lösung

Sei im Folgenden

$$A = \frac{x^2}{(ay + bz)(az + by)} + \frac{y^2}{(az + bx)(ax + bz)} + \frac{z^2}{(ax + by)(ay + bx)}.$$

Die Vermutung, dass das Minimum von  $A$  für  $x = y = z$  angenommen wird, ist recht naheliegend. Einsetzen von  $x = y = z$  liefert den Wert  $3/(a + b)^2$ . Wir geben nun drei Beweise für die Ungleichung

$$A \geq \frac{3}{(a + b)^2}.$$

#### 1. Beweis

Es gilt mit Hilfe von AM-GM

$$\begin{aligned} (ax + by)(ay + bx) &= xy(a^2 + b^2) + (x^2 + y^2)ab \\ &\leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) + (x^2 + y^2)ab = \frac{(a + b)^2}{2}(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Diese und die analogen Abschätzungen liefern

$$A \geq \frac{2}{(a+b)^2} \left( \frac{x^2}{y^2+z^2} + \frac{y^2}{z^2+x^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2} \right).$$

Die grosse Klammer ist nun immer  $\geq 3/2$ , was den Beweis abschliesst (Ungleichung von Nesbit). Um dies einzusehen, kann man zum Beispiel C.S. verwenden. Es gilt einerseits

$$\left( \frac{u}{v+w} + \frac{v}{w+u} + \frac{w}{u+v} \right) (u(v+w) + v(w+u) + w(u+v)) \geq (u+v+w)^2,$$

andererseits aber auch

$$u(v+w) + v(w+u) + w(u+v) \leq \frac{2}{3}(u^2 + v^2 + w^2 + 2uv + 2vw + 2wu) = \frac{2}{3}(u+v+w)^2,$$

Kombination der beiden Ungleichungen ergibt das Gewünschte.

### 2. Beweis

Wir können oBdA  $x \geq y \geq z$  annehmen. Dann gilt  $x^2 \geq y^2 \geq z^2$  und

$$(ax+by)(ay+bx) \geq (az+bx)(ax+bz) \geq (ay+bz)(az+by).$$

Mit Hilfe von Tchebychef und AM-HM folgt nun

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{(x^2+y^2+z^2)}{3} \left( \frac{1}{(ay+bz)(az+by)} + \frac{1}{(az+bx)(ax+bz)} + \frac{1}{(ax+by)(ay+bx)} \right) \\ &\geq 3(x^2+y^2+z^2) \frac{1}{(ay+bz)(az+by) + (az+bx)(ax+bz) + (ax+by)(ay+bx)}. \end{aligned}$$

Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} &(ay+bz)(az+by) + (az+bx)(ax+bz) + (ax+by)(ay+bx) \\ &= (a^2+b^2)(xy+yz+zx) + 2ab(x^2+y^2+z^2) \\ &\leq (a^2+b^2)(x^2+y^2+z^2) + 2ab(x^2+y^2+z^2) = (a+b)^2(x^2+y^2+z^2). \end{aligned}$$

Insgesamt also wie gewünscht

$$A \geq 3 \frac{x^2+y^2+z^2}{(a+b)^2(x^2+y^2+z^2)} = \frac{3}{(a+b)^2}.$$

### 3. Beweis

Nach C.S. gilt

$$\begin{aligned} &(x^2(ay+bz)(az+by) + y^2(az+bx)(ax+bz) + z^2(ax+by)(ay+bx)) \times A \\ &\geq (x^2+y^2+z^2)^2 \end{aligned}$$

Man vervollständigt die Lösung nun ähnlich wie im 2. Beweis.

# Lösungen zur SMO Finalrunde 2004

zweite Prüfung - 3. April 2004

6. Bestimme alle  $k$ , für die eine natürliche Zahl  $n$  existiert, sodass  $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$  mit genau  $k$  Nullen endet.

## Lösung

Sei  $A(n) = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ . Die Beispiele  $A(1) = 10$ ,  $A(3) = 100$  und  $A(4) = 354$  zeigen, dass  $k = 0, 1, 2$  möglich ist. Nehme nun an, dass  $A(n)$  mit mindestens drei Nullen endet, dann gilt  $8 \mid A(n)$ . Für  $n \geq 3$  ist aber  $A(n) \equiv 1 + 0 + 3^n + 0 = 4$  oder  $2 \pmod{8}$ , Widerspruch.

7. Gegeben sind  $m \geq 3$  Punkte in der Ebene. Beweise, dass man stets drei dieser Punkte  $A, B, C$  auswählen kann, sodass gilt

$$\sphericalangle ABC \leq \frac{180^\circ}{m}.$$

## Lösung

Die konvexe Hülle der  $m$  Punkte sei ein  $k$ -Eck. Die Innenwinkelsumme in diesem  $k$ -Eck beträgt  $(k - 2) \cdot 180^\circ$ . Für den kleinsten Innenwinkel  $\alpha$  gilt daher die Abschätzung

$$\alpha \leq \frac{k - 2}{k} \cdot 180^\circ \leq \frac{m - 2}{m} \cdot 180^\circ.$$

Sei  $P$  der Eckpunkt bei  $\alpha$ . Von  $P$  aus gesehen liegen die übrigen  $m - 1$  Punkte in einem Sektor mit Öffnungswinkel  $\alpha$ . Zwei dieser Punkte bilden mit  $P$  daher einen Winkel von höchstens

$$\frac{\alpha}{m - 2} \leq \frac{180^\circ}{m}.$$

8. An einer Wandtafel steht eine Liste natürlicher Zahlen. Es wird nun wiederholt die folgende Operation ausgeführt: Wähle zwei beliebige Zahlen  $a, b$  aus, wische sie aus und schreibe an deren Stelle  $\text{ggT}(a, b)$  und  $\text{kgV}(a, b)$ . Zeige, dass sich der Inhalt der Liste ab einem bestimmten Zeitpunkt nicht mehr verändert.

## 1. Lösung

Für beliebige natürliche Zahlen  $a$  und  $b$  gilt bekanntlich  $\text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) = ab$ . Folglich ist das Produkt  $P$  aller Zahlen an der Tafel eine Invariante. Bei einer Operation ändern sich die beiden Zahlen genau dann, wenn keine ein Teiler der anderen ist. In diesem Fall sei  $d = \text{ggT}(a, b)$  und  $a = xd$ ,  $b = yd$  mit teilerfremden Zahlen  $x$  und  $y$ , die beide grösser als 1 sind. Nun gilt  $xyd + d > xd + yd$ , denn dies ist äquivalent zu  $(x - 1)(y - 1) > 0$ , was nach Voraussetzung stimmt. Folglich ist  $\text{ggT}(a, b) + \text{kgV}(a, b) > a + b$ , die Summe der Zahlen vergrössert sich also bei der Operation. Diese Summe ist nun aber stets eine ganze Zahl und ausserdem nach oben beschränkt, zum Beispiel durch  $n \cdot P$ , wobei  $n$  die Anzahl Zahlen an der Wandtafel ist. Daher kann sich nur bei endlich vielen Operationen etwas an den Zahlen auf der Tafel ändern.

## 2. Lösung

Wir benützen Induktion nach  $n$ , der Anzahl Zahlen an der Tafel. Die Behauptung ist klar für  $n = 2$ , denn nach einer Operation ist die eine Zahl durch die andere teilbar, die beiden Zahlen ändern sich danach nicht mehr. Nehme an, dies gelte für je  $n$  Zahlen und nehme an, wir hätten  $n + 1$  Zahlen an der Tafel und eine Folge von Operationen, sodass sich diese Zahlen beliebig oft ändern. Unter allen Zahlen, die irgendwann mal an der Tafel stehen, gibt es eine kleinste, diese sei  $a$ . Sobald  $a$  das erste Mal an der Tafel steht, bleibt sie für immer dort. Die einzige Möglichkeit, wie  $a$  von der Tafel verschwinden könnte ist nämlich die, dass  $a$  und eine weitere Zahl ausgewählt und durch zwei neue ersetzt werden. Wird nun aber  $a$  und eine andere Zahl ausgewählt und durch den  $\text{ggT}$  und das  $\text{kgV}$  ersetzt, dann ändern sich die beiden Zahlen nicht, denn sonst wäre der  $\text{ggT}$  kleiner als  $a$ , was nicht möglich ist. Daraus folgt ausserdem, dass es unendlich viele Operationen geben muss, in denen  $a$  keine der beiden Zahlen ist. Entferne nun  $a$  von der Tafel und betrachte nur die Folge dieser eben beschriebenen Prozesse. Diese ändern die verbleibenden  $n$  Zahlen unendlich oft, im Widerspruch zur Induktionsannahme.

## 3. Lösung

Wir nennen ein Paar  $(a, b)$  von zwei Zahlen an der Tafel *gut*, wenn  $a$  ein Teiler von  $b$  ist. Wir zeigen nun, dass sich die Anzahl guter Paare um mindestens 1 erhöht, wenn sich zwei Zahlen bei einer Operation ändern. Da die Anzahl guter Paare höchstens gleich  $\binom{n}{2}$  ist, also insbesondere beschränkt, ändern sich die Zahlen an der Tafel irgendwann nicht mehr.

Um dies nun zu zeigen, nehmen wir an, dass  $a$  und  $b$  bei einer Operation ersetzt werden durch die neuen Zahlen  $\text{ggT}(a, b) = c$  und  $\text{kgV}(a, b) = d$  und unterscheiden verschiedene Fälle. Seien im Folgenden  $x$  und  $y$  von  $a$  und  $b$  verschieden.

- Ist  $(x, y)$  vor der Operation ein gutes Paar, dann bleibt es auch gut.

- Sind  $(a, x)$  und  $(b, x)$  vor der Operation beides gute Paare, dann ist  $x$  durch  $a$  und  $b$  teilbar, also auch durch  $c$  und  $d$ . Damit sind nach der Operation die Paare  $(c, x)$  und  $(d, x)$  beide gut.
- Sei  $(a, x)$  vor der Operation ein gutes Paar,  $(b, x)$  aber nicht. Dann ist  $(c, x)$  sicher ein gutes Paar.
- Ist keines der Paare  $(a, x)$  und  $(b, x)$  gut, dann kann es ja nicht schlimmer werden.

Diese und die analogen Fälle für Paare der Form  $(x, a)$  und  $(x, b)$  zeigen, dass sich die Zahl der guten Paare  $\neq (a, b), (b, a)$  nicht verringert. Nun ist aber keines der Paare  $(a, b)$  und  $(b, a)$  gut, denn sonst würden sich die beiden Zahlen während der Operation nicht ändern. Nach der Operation ist aber  $(c, d)$  ein neues gutes Paar. Dies schliesst den Beweis ab.

9. Sei  $ABCD$  ein Sehnenviereck, sodass gilt  $|AB| + |CD| = |BC|$ . Zeige, dass der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von  $\sphericalangle DAB$  und  $\sphericalangle CDA$  auf der Seite  $BC$  zu liegen kommt.

### Lösung

Sei  $P$  der Punkt auf  $\overline{BC}$  mit  $|BP| = |BA|$ . Nach Voraussetzung gilt dann auch  $|CP| = |CD|$ . Wir definieren  $\sphericalangle APB = \alpha$  und  $\sphericalangle CPD = \beta$ . Mit Winkeljagd finden wir  $\sphericalangle DCP = 180^\circ - 2\beta$  und darum  $\sphericalangle BAD = 2\beta$ . Analog zeigen wir  $\sphericalangle ADC = 2\alpha$ . Sei nun  $W$  der Schnittpunkt von  $BC$  mit der Winkelhalbierenden von  $\sphericalangle BAD$ . Nach Konstruktion gilt  $\sphericalangle BAW = \beta$ . Daraus können wir schliessen, dass  $W$  nicht ausserhalb von  $C$  liegen kann, denn in diesem Fall würde gelten

$$\beta = \sphericalangle BAW > \sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC > \sphericalangle PDC = \beta.$$

Widerspruch. OBdA können wir auch annehmen, dass  $W$  auf  $\overline{BP}$  liegt (andernfalls umbenennen). Da  $\sphericalangle WAD = \beta$  und  $\sphericalangle DPW = 180^\circ - \beta$ , ist  $AWPD$  ein Sehnenviereck und darum  $\sphericalangle ADW = \sphericalangle APW = \alpha$ .  $DW$  ist also die Winkelhalbierende von  $\sphericalangle ADC$ .  $W$  ist also der Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden und liegt nach Konstruktion auf  $BC$ .

10. Sei  $n > 1$  eine ungerade natürliche Zahl. Die Felder eines  $n \times n$  Schachbretts sind abwechselnd weiss und schwarz gefärbt, sodass die vier Eckfelder schwarz sind. Ein L-triomino ist eine L-förmige Figur, die genau drei Felder des Brettes bedeckt. Für welche Werte von  $n$  ist es möglich, alle schwarzen Felder mit L-triominos zu bedecken, sodass keine zwei L-triominos sich überlappen? Bestimme für diese Werte von  $n$  die kleinstmögliche Zahl von L-triominos die dazu nötig sind.

## Lösung

Setze  $n = 2m + 1$  mit  $m \geq 1$ . Nummeriere die Zeilen und Spalten von 1 bis  $n$  und markiere alle Felder, die in einer ungeraden Zeile und einer ungeraden Spalte liegen. Diese  $(m + 1)^2$  markierten Felder sind alle schwarz. Ein L-triomino kann höchstens ein markiertes Feld bedecken, also ist die benötigte Zahl von L-triominos mindestens  $(m + 1)^2$ . Andererseits bedeckt ein L-triomino genau drei Felder des Brettes. Da sich keine zwei überlappen dürfen, ist ihre Zahl höchstens gleich  $(2m + 1)^2/3$ . Daraus folgt  $m \geq 3$ , also  $n \geq 7$ .

Wir zeigen nun induktiv, dass man für  $n \geq 7$  alle schwarzen Felder mit genau  $(m + 1)^2$  L-triominos bedecken kann.

Ein  $2 \times 3$  Rechteck lässt sich mit zwei, ein  $4 \times 3$  Rechteck mit vier L-triominos bedecken. Bedecke das  $7 \times 7$  Brett mit vier  $4 \times 3$  Rechtecken, sodass das zentrale (schwarze) Feld unbedeckt bleibt. Es ist leicht zu sehen, dass man nun zwei L-triominos kippen kann, sodass das zentrale Feld bedeckt ist, dafür ein weisses frei bleibt. Dies zeigt die Behauptung für  $n = 7$ .

Für den Induktionsschritt  $m \rightarrow m + 1$  bedecken wir die schwarzen Felder des linken unteren  $2m + 1 \times 2m + 1$  Teilbrett mit genau  $(m + 1)^2$  L-triominos (Induktionsvoraussetzung) und müssen zeigen, dass sich die schwarzen Felder des verbleibenden L-förmigen Randgebiets mit  $(m + 2)^2 - (m + 1)^2 = 2m + 3$  L-triominos bedecken lassen. Dies sieht man unmittelbar ein, wenn man sich die Situation skizziert.