Lösungen 1. Prüfung

1. Für die rellen Zahlen x, y, a gelten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} x+y &= a \\ x^3+y^3 &= a \\ x^5+y^5 &= a. \end{aligned}$$

Bestimme alle möglichen Werte von a.

1. Lösung:

Die Polynome auf der linken Seite der drei Gleichungen sind symmetrisch in x und y, wir können sie daher durch die elementarsymmetrischen Polynome $u = x + y$ und $v = xy$ ausdrücken und erhalten

$$\begin{aligned} u &= a \\ u^3 - 3uv &= a \\ u^5 - 5u^3v + 5uv^2 &= a. \end{aligned}$$

Setzt man $x = y = 0$ in die Gleichungen ein, dann sieht man, dass a den Wert 0 annehmen kann. Wir nehmen deshalb im folgenden $a \neq 0$ an. Einsetzen von $u = a$ in die zweite Gleichung ergibt $a^3 - 3av = a$, wegen $a \neq 0$ können wir durch a teilen und erhalten $v = (a^2 - 1)/3$. Setzt man dies und $u = a$ in die dritte Gleichung ein, dann folgt $a^5 - 5a^3(a^2 - 1)/3 + 5a(a^2 - 1)^2/9 = a$, nach Multiplikation mit $-9/a$ und Vereinfachen also

$$a^4 - 5a^2 + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a^2 - 1)(a^2 - 4) = 0.$$

Wir erhalten die möglichen Werte $a^2 = 1$ oder $a^2 = 4$, also für a die möglichen Werte $-2, -1, 1, 2$. Wir zeigen noch, dass diese vier Werte wirklich vorkommen können. Dazu setzt man in die drei Gleichungen der Reihe nach die folgenden Werte für x und y ein: $x = y = -1$, $x = 0, y = -1$, $x = 0, y = 1$ und $x = y = 1$. Insgesamt kann a also genau die fünf Werte $-2, -1, 0, 1, 2$ annehmen.

2. Lösung:

Sind alle drei Gleichungen erfüllt, dann gilt

$$(x + y)(x^5 + y^5) = a^2 = (x^3 + y^3)^2.$$

Ausmultiplizieren und Vereinfachen ergibt

$$xy(x^4 + y^4) = 2x^3y^3. \tag{1}$$

Wir betrachten zuerst den Fall, wo x und y nicht beide von 0 verschieden sind. OBbA sei $y = 0$. Die drei Gleichungen werden dann zu $x = x^3 = x^5 = a$. Aus $x = x^3$ folgt $x = -1$, 0 oder 1. In diesen Fällen ist dann tatsächlich $a = x = x^3 = x^5 = -1$, 0 oder 1, also kann a in diesem Fall nur genau diese drei Werte annehmen.
Im Folgenden nehmen wir an, dass $x \neq 0 \neq y$. Wir können in (1) durch xy dividieren und erhalten

$$x^4 + y^4 = 2x^2y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (x^2 - y^2)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x + y)(x - y) = 0,$$

also ist $x = y$ oder $x = -y$. Im Fall $x = y$ lesen sich die drei Gleichungen als $2x = 2x^3 = 2x^5 = a$, wie oben sieht man, dass dann $x = -1$ oder $x = 1$ ist ($x \neq 0$) und a genau die beiden Werte -2 und 2 annehmen kann. Im Fall $x = -y$ folgt aus der ersten der drei Gleichungen $a = 0$.
Insgesamt kann a also genau die fünf Werte $-2, -1, 0, 1, 2$ annehmen.

3. Lösung:

Wir benützen die binomischen Formeln $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ und $x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$. Setzt man $x = y = 0$ in die Gleichungen ein, dann sieht man, dass a den Wert 0 annehmen kann. Sei nun im Folgenden $x + y = a \neq 0$. Dividiere die zweite und dritte Gleichung durch die erste, dann folgt

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= 1 && (2)\\ x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 &= 1 && (3) \end{aligned}$$

Quadriere nun Gleichung (2) und subtrahiere dies von Gleichung (3), dann folgt weiter

$$0 = 1 - 1^2 = (x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) - (x^2 - xy + y^2)^2 = x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 = xy(x - y)^2,$$

also ist $x = 0$ oder $y = 0$ oder $x = y$. Man kann diese Fälle nun genau wie in der zweiten Lösung behandeln.

2. Sei ABC ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck. E und F seien die Fusspunkte der Höhen durch B und C. G ist die Projektion von B auf die Gerade EF und H die entsprechende Projektion von C. Zeige, dass gilt

$$|HE| = |FG|.$$

1. Lösung:

Wir bezeichnen den Winkel $\sphericalangle ABC$ mit α und den Winkel $\sphericalangle BCA$ mit γ. Weil die Höhen rechtwinklig auf den Seiten stehen, ergeben sich für die Winkel $\sphericalangle EBC = 90^o - \gamma$ und $\sphericalangle FCB = 90^o - \beta$.
Da $\sphericalangle CEB$ und $\sphericalangle CFB$ beides rechte Winkel sind, ist das Viereck $BCEF$ ein Sehenviereck. D.h. $\sphericalangle EFC = \sphericalangle EBC = 90^o - \gamma$. Da $\sphericalangle CFB$ ein rechter Winkel ist, gilt $\sphericalangle BFG = \gamma$. Analog ist $\sphericalangle CEH = \beta$.
Mit Hilfe der Trigonometrie finden wir, dass $|FB| = |BC| \cdot \cos(\beta)$ und $|EC| = |BC| \cdot \cos(\gamma)$ ist. Weiter ist sowohl $|HE|$ als auch $|FG| = |BC| \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma)$. Sie sind also gleich lang.

2. Lösung:

Die Winkel werden wie in der ersten Lösung hergeleitet. Die Dreiecke FGB und BCE sind ähnlich. Daraus folgt $\frac{|FG|}{|FB|} = \frac{|CE|}{|BC|}$, also $|FG| = \frac{|CE| \cdot |FB|}{|BC|}$. Ebenfalls sind die Dreiecke HCE und BCF ähnlich. Daraus folgt $\frac{|HE|}{|CE|} = \frac{|FB|}{|BC|}$, also $|HE| = \frac{|CE| \cdot |FB|}{|BC|} = |FG|$.

3. Lösung:

Der Thaleskreis k über $|BC|$ geht durch E und F und schneidet $|BG|$ ein zweites Mal in X. Im Falle, dass k $|BG|$ kein zweites Mal schneidet, ist $B \equiv X$. Weil X auf dem Thaleskreis liegt, ist $\sphericalangle BXC = 90^o$ und darum $XCHG$ ein Rechteck.
Die Mittelsenkrechten von $|CX|$ und $|EF|$ gehen beide durch den Mittelpunkt von k und sind parallel. Darum liegen sie aufeinander und wir nennen sie m. Bei der Spiegelung an m kommt C auf X und E auf F zu liegen. Weil $XCHG$ ein Rechteck ist, wird auch H auf G abgebildet. Daraus folgt $|HE| = |FG|$.

3. Finde die grösste reelle Zahl C_1 und die kleinste reelle Zahl C_2, sodass für alle positiven Zahlen a, b, c, d, e gilt

$$C_1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+e} + \frac{e}{e+a} < C_2.$$

Lösung:

Schreibe $f(a, b, c, d, e)$ für den abzuschätzenden Ausdruck.

Linke Ungleichung. Wir zeigen zuerst, dass $f(a, b, c, d, e) > 1$ gilt, und geben drei Argumente:
1. Argument Es gilt

$$f(a, b, c, d, e) > \frac{a}{a+b+c+d+e} + \ldots + \frac{e}{a+b+c+d+e} = \frac{a+b+c+d+e}{a+b+c+d+e} = 1.$$

2. Argument Sei oBdA a die grösste der fünf Zahlen. Dann gilt

$$f(a,b,c,d,e) > \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} > \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+a} = 1.$$

3. Argument Es geht auch kompliziert: Nach Cauchy-Schwarz gilt

$$(a(a+b)+b(b+c)+c(c+d)+d(d+e)+e(e+a))f(a,b,c,d,e) \geq (a+b+c+d+e)^2,$$

und ausserdem ist

$$\begin{aligned} &a(a+b)+b(b+c)+c(c+d)+d(d+e)+e(e+a) \\ &= a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+ab+bc+cd+de+ea \\ &< (a+b+c+d+e)^2. \end{aligned}$$

Kombiniert man diese zwei Ungleichungen, ergibt sich das Gewünschte.

Als nächstes zeigen wir, dass 1 die grösste untere Schranke ist. Für $t > 0$ gilt

$$f(1,t,t^2,t^3,t^4) = \frac{4}{1+t} + 1 - \frac{1}{t^4+1} < \frac{4}{1+t} + 1,$$

und dieser Wert kommt 1 beliebig nahe, wenn t gross wird. Genauer: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann wählen wir $t > 4/\varepsilon - 1$ und erhalten

$$1 < f(1,t,t^2,t^3,t^4) < 1 + \frac{4}{1+t} < 1 + \varepsilon.$$

Daher ist $C_1 = 1$.

Rechte Ungleichung. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Lösung zu vervollständigen.
1. Argument Wegen der zyklischen Symmetrie von f gilt offenbar

$$f(a,b,c,d,e) + f(e,d,c,b,a) = 5,$$

das heisst $f(a,b,c,d,e) = 5 - f(e,d,c,b,a) < 5 - 1 = 4$ und da $f(e,d,c,b,a)$ Werte annehmen kann, die beliebig nahe bei 1 liegen, ist 4 die kleinste obere Schranke. Also $C_2 = 4$.
2. Argument Wir nutzen folgende allgemeine Tatsache: Sind $u, v > 0$ und $u/v < 1$, dann gilt für jede positive Zahl x die Ungleichung $u/v < (u+x)/(v+x) < 1$. In unserem Fall erhält man so

$$f(a,b,c,d,e) < \frac{a+(c+d+e)}{a+b+(c+d+e)} + \ldots + \frac{e+(b+c+d)}{e+a+(b+c+d)} = \frac{4(a+b+c+d+e)}{a+b+c+d+e} = 4.$$

Wie oben zeigt man ausserdem, dass $f(t^4,t^3,t^2,t,1)$ Werte beliebig nahe bei 4 annimmt, wenn t gross wird. Also $C_2 = 4$.

4. Finde die grösste natürliche Zahl n, die für jede ganze Zahl a ein Teiler ist von $a^{25} - a$.

1. Lösung:

Für eine Primzahl p ist $p^{25} - p$ nicht durch p^2 teilbar, daher kann n nicht durch ein Quadrat > 1 teilbar sein. Sei nun p eine Primzahl, die ein Teiler ist von $a^{25} - a$ für jede ganze Zahl a. Dann muss stets $a^{25} - a \equiv 0$ sein modulo p. Ist a nicht durch p teilbar, dann kann man diese Kongruenz mit a kürzen und erhält $a^{24} \equiv 1$. Sei d die Ordnung von a modulo p, also die kleinste natürliche Zahl mit $a^d \equiv 1$ (p). Dann ist einerseits $d \mid \varphi(p) = p - 1$ und andererseits $d \mid 24$. Wir wählen nun a als primitive Wurzel modulo p, also so, dass $d = p - 1$ ist. Nun folgt also $p - 1 \mid 24$, also $p = 2, 3, 5, 7$ oder 13. Mit Hilfe des kleinen Satzes von Fermat zeigt man leicht, dass $a^{25} - a$ stets durch diese fünf Primzahlen teilbar ist, also gilt $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2730$.

2. Lösung

Zuerst faktorisieren wir $a^{25} - a$ mit Hilfe der binomischen Formeln:

$$\begin{aligned} a^{25} - a &= a(a^{12} - 1)(a^{12} + 1) \\ &= a(a^6 - 1)(a^6 + 1)(a^4 + 1)(a^8 - a^4 + 1) \\ &= a(a - 1)(a^2 + a + 1)(a + 1)(a^2 - a + 1)(a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1) \\ &\quad \cdot (a^4 + 1)(a^8 - a^4 + 1). \end{aligned}$$

Für $a = 2$ erhält man damit die Primfaktorzerlegung $2^{25} - 2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 241$. Für $a = 3$ ergibt sich analog $3^{25} - 3 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 73 \cdot 6481$. Nun ist n ein Teiler von $2^{25} - 2$ und $3^{25} - 3$, also auch von $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2730$. Nun zeigt man aber mit dem kleinen Satz von Fermat aber leicht, dass $a^{25} - a$ immer durch 2, 3, 5, 7 und 13 teilbar ist, zum Beispiel gilt $a^{25} - a = a \cdot (a^{12})^2 - a \equiv a - a = 0$ (13).

5. Auf einem Spielbrett mit 5×9 Feldern liegen n Steine, wobei zu jedem Zeitpunkt auf jedem Feld höchstens ein Stein liegen darf. Ein Spielzug besteht darin, jeden Stein in eines der angrenzenden Felder oben, unten, links oder rechts zu verschieben. Dies geschieht für alle Steine gleichzeitig. Wird dabei ein Stein in einem Zug horizontal bewegt, dann muss er im nächsten Zug vertikal bewegt werden und umgekehrt. Bestimme den grössten Wert für n, sodass es eine Anfangsposition der n Steine und eine Folge von Spielzügen gibt, sodass dieses Spiel beliebig lange fortgesetzt werden kann.

Lösung:

Antwort: $n = 32$

Führe Koordinaten ein, sodass das Feld unten links (1,1) und jenes oben rechts (9,5) erhält. Färbe nun die Felder mit drei Farben:

- Die Felder (2,2), (4,2), (6,2), (8,2), (2,4), (4,4), (6,4), (8,4) rot
- Die Felder (1,1), (3,1), (5,1), (7,1), (9,1), (1,3), (3,3), (5,3), (7,3), (9,3), (1,5), (3,5), (5,5), (7,5), (9,5) blau
- Den Rest gelb

Auf den roten Feldern liegen zu jedem Zeitpunkt höchstens 8 Steine. Die Steine auf den blauen Feldern liegen zwei Züge später auf einem roten Feld, also können ebenfalls immer höchsten 8 Steine auf blauen Feldern liegen. Die Steine auf den gelben Feldern liegen einen Zug später entweder auf einem roten oder einem blauem Feld, es können also zu jedem Zeitpunkt höchstens $8 + 8 = 16$ Steine auf gelben Feldern liegen. Bei Spielbeginn können daher nicht mehr als $8+8+16 = 32$ Steine auf dem Brett liegen, das heisst $n \leq 32$.
Andererseits ist $n = 32$ möglich: Setze Steine auf alle Felder ausser jenen mit Koordinaten $(1, k)$ und $(l, 1)$ und bewege alle simultan nach links, unten, rechts, oben, links, unten, ... Dies kann beliebig lange fortgesetzt werden.

Lösungen 2. Prüfung

6. Für die positiven reellen Zahlen a, b, c gelte $a + b + c = 2$. Zeige, dass die folgende Ungleichung erfüllt ist und bestimme alle Fälle, in denen das Gleichheitszeichen steht:

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{27}{13}$$

1. Lösung:

Nach Cauchy-Schwarz gilt

$$\left(\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca}\right)((1+ab)+(1+bc)+(1+ca)) \geq (1+1+1)^2 = 9.$$

Andererseits folgt mit $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ (Hauptsatz, AM-GM, C.S.)

$$\begin{aligned}(1+ab)+(1+bc)+(1+ca) &= 3 + \frac{1}{3}(ab+bc+ca+2(ab+bc+ca)) \\ &\leq 3 + \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)) \\ &= 3 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{13}{3}.\end{aligned}$$

Kombination dieser beiden Ungleichungen ergibt die Behauptung. Gleichheit gilt nur für $a = b = c = 2/3$.

2. Lösung:

Mit AM-HM folgt

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{9}{(1+ab)+(1+bc)+(1+ca)},$$

es genügt daher zu zeigen, dass $(1+ab)+(1+bc)+(1+ca) \leq 13/3$. Nach Vereinfachen und Homogenisieren lautet dies

$$ab + bc + ca \leq \frac{4}{3} = \frac{(a+b+c)^2}{3}.$$

Ausmultiplizieren und Umordnen führt zu

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2,$$

was nach dem Hauptsatz richtig ist. In der ersten Ungleichung gilt genau dann Gleichheit, wenn $(1 + ab) = (1 + bc) = (1 + ca)$, also wenn $a = b = c = 2/3$.

3. Lösung:

Nach Multiplikation mit $(1 + ab)(1 + bc)(1 + ca)$ und Vereinfachung lautet die Ungleichung

$$(ab + bc + ca) + 14(a^2bc + ab^2c + abc^2) + 27a^2b^2c^2 \leq 12.$$

Wir drücken die linke Seite durch die Elementarsymmetrischen Polynome u, v, w aus. Dabei verwenden wir noch die Nebenbedingung $u = 2$ aus der Aufgabenstellung:

$$v + 28w + 27w^2 \leq 12.$$

Mit AM-GM erhält man die Abschätzungen

$$\begin{aligned} w &= abc \leq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}, \\ v &= ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)) = \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a = b = c$ (dies ist ein Spezialfall der McLaurin'schen Ungleichungen zwischen den Elementarsymmetrischen Polynomen). Damit ergibt sich nun leicht

$$v + 28w + 27w^2 \leq \frac{4}{3} + 28 \cdot \frac{8}{27} + 27 \cdot \frac{8^2}{27^2} = 12.$$

7. Finde alle Polynome $Q(x) = ax^2 + bx + c$ mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass drei verschiedene Primzahlen p_1, p_2, p_3 existieren mit

$$|Q(p_1)| = |Q(p_2)| = |Q(p_3)| = 11.$$

Lösung:

Wir unterscheiden 2 Fälle, je nachdem, wieviele Vorzeichen von $Q(p_k)$ negativ sind. Wir können annehmen, dass höchstens ein Vorzeichen negativ ist, ansonsten ersetzen wir $Q(x)$ durch $-Q(x)$.

(a) $Q(p_1) = Q(p_2) = Q(p_3) = 11$
Das Polynom $Q(x) - 11$ hat Grad ≤ 2 und 3 verschiedene Nullstellen, es verschwindet also identisch, daher ist $Q(x) = 11$ konstant.

(b) $Q(p_1) = -11, Q(p_2) = Q(p_3) = 11$
Das Polynom $Q(x) - 11$ hat die Nullstellen p_2, p_3, wir können also schreiben $Q(x) - 11 = a(x - p_2)(x - p_3)$. Einsetzen von p_1 liefert

$$a(p_1 - p_2)(p_1 - p_3) = -2 \cdot 11.$$

Sind p_1, p_2, p_3 alle ungerade, dann ist die linke Seite durch 4 teilbar, Widerspruch. Ist $p_1 = 2$, dann sind die beiden Klammern links ungerade und können nicht beide den Betrag 1 haben. Ein Vergleich mit der rechten Seite liefert $\{p_2, p_3\} = \{3, 13\}$. Setzt man diese Werte in Q ein und löst die drei Gleichungen nach den Koeffizienten auf, dann ergibt sich $a = -2, b = 32, c = -67$. Ist OBdA $p_2 = 2$, dann ist die erste Klammer links ungerade, die zweite gerade. Daraus folgt $p_1 = 3, p_3 = 5$ oder $p_1 = 13, p_3 = 11$. Analoge Rechnungen wie vorher führen im ersten Fall zu $a = 11, b = -77, c = 121$ und im zweiten Fall zu $a = -1, b = 13, c = -11$.

Insgesamt erhalten wir also für $\pm Q(x)$ die Möglichkeiten

$$\begin{array}{rcl} 11 & , & \{p_1, p_2, p_3\} \ \text{ beliebig}, \\ x^2 - 13x + 11 & , & \{p_1, p_2, p_3\} = \{2, 11, 13\}, \\ 2x^2 - 32x + 67 & , & \{p_1, p_2, p_3\} = \{2, 3, 13\}, \\ 11x^2 - 77x + 121 & , & \{p_1, p_2, p_3\} = \{2, 3, 5\}. \end{array}$$

8. Sei $A_1A_2A_3$ ein Dreieck und ω_1 ein Kreis, der durch A_1 und A_2 geht. Nehme an, es existieren Kreise $\omega_2, \dots, \omega_7$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) ω_k geht durch die Punkte A_k und A_{k+1} für $k = 2, 3, \dots, 7$, $\qquad (A_i = A_{i+3})$

(b) ω_k und ω_{k+1} berühren sich äusserlich für $k = 1, 2, \dots, 6$.

Zeige: $\omega_1 = \omega_7$.

Lösung:

Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Innenwinkel des Dreiecks. Seien M_1, M_2 die Mittelpunkte von ω_1, ω_2 sowie m_1, m_2 die Mittelsenkrechten auf die Seiten A_1A_2, A_2A_3 und P deren Schnittpunkt. Offenbar liegt M_1 auf m_1 und M_2 auf m_2, setze $\theta_k = \angle PM_kA_2$ für $k = 1, 2$. M_1A_2 und M_1A_2 sind Radien der jeweiligen Kreise und stehen daher beide senkrecht zur gemeinsamen Tangente an ω_1 und ω_2 im Punkt A_2, also sind M_1, A_2 und M_2 kollinear. Daher gilt $\theta_1 + \theta_2 + \angle M_1M_2P = 180$, also $\theta_1 + \theta_2 = \alpha_2$. Analoge Betrachtungen für die anderen Kreise liefern die sechs Gleichungen

$$\begin{array}{ll} \theta_1 + \theta_2 = \alpha_2 & \theta_2 + \theta_3 = \alpha_3 \\ \theta_3 + \theta_4 = \alpha_1 & \theta_4 + \theta_5 = \alpha_2 \\ \theta_5 + \theta_6 = \alpha_3 & \theta_6 + \theta_7 = \alpha_1 \end{array}$$

Addiert man die linken drei Gleichungen und subtrahiert die drei rechten, dann folgt $\theta_1 = \theta_7$. Nun liegen M_1 und M_7 beide auf m_1 und verschiedene Werte von θ_1 gehören zu verschiedenen Positionen von M_1. Wegen $\theta_1 = \theta_7$ ist daher $M_1 = M_7$ und somit $\omega_1 = \omega_7$.

9. Gegeben sind ganze Zahlen $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{101} < 5050$, zeige, dass man daraus immer vier verschiedene a_k, a_l, a_m, a_n auswählen kann mit

$$5050 | (a_k + a_l - a_m - a_n).$$

Lösung:

Mit den 101 Zahlen lassen sich genau $\binom{101}{2} = 5050$ ungeordnete Paare $\{a_k, a_l\}$ bilden. Betrachte nun die 5050 Summen $a_k + a_l$. Nehme zuerst an, zwei dieser Summen $a_k + a_l$ und $a_m + a_n$ seien kongruent (mod 5050). Dann ist deren Differenz $a_k + a_l - a_m - a_n$ durch 5050 teilbar. Ausserdem ist nach Konstruktion $a_k \neq a_l$ und $a_m \neq a_n$. Nehme an, es sei $a_k = a_m$, dann folgt $a_l \equiv a_n \pmod{5050}$ und wegen $0 < a_l, a_n < 5050$ daher $a_l = a_n$, im Widerspruch dazu, dass die beiden Paare verschieden sind. Daher sind a_k, a_l, a_m, a_n alle verschieden und die Behauptung folgt in diesem Fall.
Wir nehmen nun an, dass es keine zwei kongruenten Summen gibt und führen dies zu einem Widerspruch. In diesem Fall liegt in jeder Restklasse modulo 5050 genau eine Summe. Wir berechnen nun die Summe S der 5050 paarweisen Summen auf zwei Arten.

- Einerseits kommen nach Voraussetzung unter den 5050 paarweisen Summen die Werte $0, 1, 2, \ldots, 5049 \pmod{5050}$ je genau einmal vor. Also ist

  $$S \equiv 0 + 1 + 2 + \ldots + 5049 = 5049 \cdot 5050/2 = 5049 \cdot 2525 \pmod{5050}$$

  und daher ist S ungerade.
- Andererseits gilt

  $$S = \sum_{k<l} (a_k + a_l) = 100 \sum_{k=1}^{101} a_k,$$

  also ist S gerade.

Dies ist der gesuchte Widerspruch.

10. Finde alle streng monotonen Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(f(n)) = 3n.$$

1. Lösung:

Wir versuchen, die ersten paar Werte von f zu berechnen und darin ein Muster zu erkennen. Wäre $f(1) = 1$, dann auch $3 = f(f(1)) = 1$, Widerspruch. Nehme an, $f(1) > 2$, dann ist $1 < 2 < f(1)$ und wegen der strengen Monotonie also auch $2 < f(1) < f(2) < f(f(1))$ und damit $f(f(1)) > 3$, Widerspruch. Folglich ist $f(1) = 2$. Setze $n = 1$ in die Gleichung ein, dann folgt weiter $f(2) = f(f(1)) = 3$. Setze $n = 2$, dann gilt analog $f(3) = f(f(2)) = 6$. Setze $n = 3$: $f(6) = f(f(3)) = 9$. Da f streng monoton ist, gilt ausserdem $6 = f(3) < f(4) < f(5) < f(6) = 9$, also muss zwingend $f(4) = 7$ und $f(5) = 8$ sein. Wir können so weiterfahren. Indem wir $n = 4, 5, 6$ einsetzen, erhalten wir die Werte $f(7) = 12, f(8) = 15, f(9) = 18$. Setze $n = 7, 8, 9$, dann folgt $f(12) = 21, f(15) = 24, f(18) = 27$. Jetzt können wir wieder einklammern, zum Beispiel erhält man aus $18 = f(9) < f(10) < f(11) < f(12) = 21$ die zwei Werte $f(10) = 19$ und $f(11) = 20$. Nach einiger Arbeit erhält man so die folgende Tabelle:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$f(n)$	2	3	6	7	8	9	12	15	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

n	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$f(n)$	30	33	36	39	42	45	48	51	54	55	56	57

Offenbar ist f eindeutig und für $k \geq 0$ und $0 \leq a < 3^k$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f(3^k + a) &= 2 \cdot 3^k + a \\ f(2 \cdot 3^k + a) &= 3^{k+1} + 3a, \end{aligned}$$

was wir im Folgenden beweisen werden. Zuerst zeigen wir mit vollständiger Induktion nach k, dass $f(3^k) = 2 \cdot 3^k$ und $f(2 \cdot 3^k) = 3^{k+1}$ gilt. Dies ist richtig für $k = 0$ und gelte für $k-1$. Einsetzen von $n = 2 \cdot 3^{k-1}$ und $n = 3^k$ in die Funktionalgleichung ergibt dann

$$\begin{aligned} f(3^k) &= f(f(2 \cdot 3^{k-1})) = 2 \cdot 3^k, \\ f(2 \cdot 3^k) &= f(f(3^k)) = 3^{k+1}, \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. Sei nun $k \geq 0$ beliebig. Da f streng monoton steigend ist, folgt

$$2 \cdot 3^k = f(3^k) < f(3^k + 1) < f(3^k + 2) < \ldots < f(2 \cdot 3^k - 1) < f(2 \cdot 3^k) = 3^{k+1}.$$

Die Differenz zwischen der rechten und der linken Seite beträgt 3^k und die Anzahl Terme in der Ungleichungskette ist $3^k + 1$. Da sie alle verschieden sind, folgt sofort $f(3^k + a) = 2 \cdot 3^k + a$ für $0 \leq a < 3^k$, also die erste der beiden Formeln (vergleiche die Argumentation am Anfang der Lösung für $f(4)$ und $f(5)$). Setze nun $n = 3^k + a$ in der Funktionalgleichung, dann folgt mit dem eben Gezeigten

$$f(2 \cdot 3^k + a) = f(f(3^k + a)) = 3^{k+1} + 3a,$$

also die zweite Formel, damit ist alles gezeigt.

2. Lösung:

Wir gehen von der Tabelle in der ersten Lösung aus. Das häufige Auftreten von Dreierpotenzen legt nahe, alles in Basis 3 zu betrachten. f ist offenbar gegben durch

$$\begin{aligned} f(1abc\dots d_3) &= 2abc\dots d_3, \\ f(2abc\dots d_3) &= 1abc\dots d0_3. \end{aligned}$$

Wir beweisen diese Formel durch Induktion nach n. Sie ist richtig für $n = 1$ und gelte für alle natürlichen Zahlen $< n$. Ist n von der Form $f(m)$ für eine natürliche Zahl m, dann folgt mit der Induktionsvoraussetzung und der Funktionalgleichung

$$f(2abc\dots d_3) = f(f(1abc\dots d_3)) = 1abc\dots d0_3,$$

beziehungsweise

$$f(1abc\dots d0_3) = f(f(2abc\dots d_3)) = 2abc\dots d0_3,$$

also gilt die Formel für n. Ist n nicht von der Form $f(m)$, dann muss $n = 1abc\dots d_3$ sein mit d gleich 1 oder 2. Wir unterscheiden nun zwei Fälle. Wenn alle Ziffern von n ausser der ersten und letzten gleich 2 sind, dann folgt mit Hilfe der strengen Monotonie von f

$$\begin{aligned} 222\dots 20_3 &= f(122\dots 20_3) < f(122\dots 21_3) \\ &< f(122\dots 22_3) < f(200\dots 00_3) = 1000\dots 00_3. \end{aligned}$$

Die beiden Zahlen links und rechts haben Differenz 3 und alle vier Zahlen sind ganz. Daraus folgt mit einem Einschachtelungsargument, dass $f(n)$ den behaupteten Wert hat (vergleiche die Argumentation am Anfang der 1. Lösung für $f(4)$ und $f(5)$).
Wir betrachten nun noch den Fall, wo n in Basis 3 noch eine weitere Ziffer $\neq 2$ besitzt. Ähnlich wie oben ergibt sich

$$\begin{aligned} 2abc\dots 0_3 &= f(1abc\dots 0_3) < f(1abc\dots 1_3) \\ &< f(1abc\dots 2_3) < f(1abc\dots 0_3 + 10_3) = 2abc\dots 0_3 + 10_3. \end{aligned}$$

Wieder ergibt ein Einschachtelungsargument die Behauptung. Damit ist alles gezeigt.