Schweizer IMO - Selektion

erste Prüfung - 4. Mai 2001

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. In einem Park sind 2001×2001 Bäume in einem quadratischen Gitter angeordnet. Was ist die grösste Zahl an Bäumen, die man fällen kann, sodass kein Baumstrunk von einem anderen aus sichtbar ist?
(Die Bäume sollen Durchmesser 0 haben)

2. Seien a, b und c die Seiten eines Dreiecks. Beweise die Ungleichung

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{c+a-b} + \sqrt{b+c-a} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

3. In einem konvexen Fünfeck ist jede Diagonale parallel zu einer Seite. Zeige, dass das Verhältnis zwischen den Längen der Diagonalen und der dazu parallelen Seite für alle Diagonalen dasselbe ist. Bestimme den Wert dieses Verhältnisses.

4. Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $t_1, t_2, \ldots, t_k$ verschiedene Teiler von n. Eine Identität der Form $n = t_1 + t_2 + \ldots + t_k$ heisst Darstellung von n als Summe verschiedener Teiler. Zwei solche Darstellungen gelten als gleich, wenn sie sich nur um die Reihenfolge der Summanden unterscheiden (zum Beispiel sind $20 = 10+5+4+1$ und $20 = 5+1+10+4$ zweimal die gleiche Darstellung von 20 als Summe verschiedener Teiler). Sei $a(n)$ die Anzahl verschiedener Darstellungen von n als Summe verschiedener Teiler. Zeige oder widerlege:

Es gibt ein $M \in \mathbb{N}$ mit $a(n) \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

5. Sei $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ eine Folge positiver ganzer Zahlen mit der Eigenschaft, dass für $i < j$ die Dezimaldarstellung von a_j nicht mit jener von a_i beginnt (zum Beispiel können die Zahlen 137 und 13729 nicht beide in der Folge vorkommen). Beweise, dass gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{9}$$

Schweizer IMO - Selektion

zweite Prüfung - 19. Mai 2001

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ habe die folgenden Eigenschaften:

(a) $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [0,1]$

(b) $f(1) = 1$

(c) $f(x+y) \geq f(x) + f(y) \quad \forall\, x, y, x+y \in [0,1]$

Beweise: $f(x) \leq 2x \quad \forall x \in [0,1]$

7. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Umkreismittelpunkt O. S sei der Kreis durch A, B und O. Die Geraden AC und BC schneiden S in den weiteren Punkten P und Q. Zeige $CO \perp PQ$.

8. Finde die zwei kleinsten natürlichen Zahlen n, sodass die Brüche

$$\frac{68}{n+70}, \frac{69}{n+71}, \frac{70}{n+72}, \ldots, \frac{133}{n+135}$$

alle irreduzibel sind.

9. In Genf sind 16 Geheimagenten am Werk. Jeder Agent überwacht mindestens einen anderen Agenten, aber keine zwei Agenten überwachen sich gegenseitig. Nehme an, dass je 10 Agenten so nummeriert werden können, dass der erste den zweiten überwacht, der zweite den dritten usw. und der zehnte den ersten. Zeige, dass dann auch je 11 Agenten in dieser Art nummeriert werden können, dass jeder den nächsten überwacht.

10. Zeige, dass jede 1000-elementige Teilmenge $M \subset \{0, 1, \ldots, 2001\}$ eine Zahl enthält, die eine Zweierpotenz ist, oder zwei verschiedene Zahlen, deren Summe eine Zweierpotenz ist.