Axiome - das Fundament der Mathematik

Maturitätsarbeit 2008 von Lucas Dahinden, C6a

Betreut von Dr. sc. math. Peter Gallin und Marcel Meyer
an der Kantonsschule Zürcher Oberland

Zusammenfassung

Das Ziel dieser Maturitätsarbeit ist, Interessierten einen Einblick in die Axiomatik und die damit verbundenen Probleme zu gewähren. Sie ist nicht als Nachschlagewerk gedacht, sondern nur zur Bildung der Idee, was man unter dem heute leider etwas in den Hintergrund gerückten Begriff "Axiom" verstehen könnte. Sie widerspiegelt einige Erfahrungen und Entdeckungen, die ich persönlich im Versuch, die Überlegungen und Probleme von Mathematikern früherer Zeiten zu verstehen, erlebte. Sie beginnt mit den Anfängen der Axiomatik in der griechischen Geometrie, betrachtet ein Axiomensystem von Origami und setzt sich mit einigen Problemstellungen der Axiomatik, insbesondere mit den Gödelschen Unvollstängigkeitssätzen auseinander.

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Das Thema meiner Maturitätsarbeit tendierte bis auf eine kurze Phase, in der ich etwas komponieren wollte, eigentlich klar zum Bereich der Mathematik, denn die Mathematik gefällt mir. Es war mir klar, dass ich in diesem Gebiet nur schwerlich etwas Neues sagen kann, da das Einfache mit höchster Wahrscheinlichkeit schon gesagt wurde und das Schwierige unglaublich schwierig zu finden ist. Deshalb entschied ich mich dazu, ein schon von früheren Mathematikern erkundetes Gebiet der Mathematik, das nicht in der Schule bearbeitet wird, im Eigenstudium zu erforschen. Dieses fand ich bei der Lektüre des Buches "Gödel Escher Bach" von Douglas R. Hofstadter: die Axiome. Dieses ist nebenbei ein sehr lesenswertes Buch, wenn man sich an den etwas altmodisch anmutenden Stil gewöhnen kann. Erst leitete mich dieses Buch zu den Unvollständigkeitssätzen von Kurt Gödel, die den Hauptteil meiner Arbeit ausmachen. Die Axiome entdeckte ich erst durch diese Sätze. Da der Begriff "Axiom" heute in der Schule meist nicht mehr vermittelt wird, habe ich es mir zum Ziel gesetzt, auch andere Interessierte an meinen Entdeckungen teilhaben zu lassen. Das Resultat ist eine Einleitung in das Gebiet der Axiome und die damit verbundenen Probleme. Der Titel "Axiome - das Fundament der Mathematik" meiner Arbeit ist vielleicht etwas irreführend, denn nicht nur die Mathematik basiert auf Axiomen, sondern eigentlich jedes System. Doch in den meisten Systemen sind die Axiome nicht von allzu grossem Interesse, da man in einer praxisbezogenen Arbeit besser über anderes nachdenkt, als über die gegenseitige Unableitbarkeit und Vollständigkeit von Axiomen. Da die (reinen) Mathematiker aber (deklariertermassen) keinen Praxisbezug haben, ist die Axiomatik für sie besonders fruchtbar und bedeutend. Ich habe also das Wort "Mathematik" in den Titel gesetzt, da die Mathematik von allen Wissenschaften vermutlich am meisten von der Axiomatik profitiert und nicht, weil "Axiom" etwa ein ausschliesslich mathematischer Begriff wäre. Auch wenn man bei der Lektüre nicht jedes Detail versteht, so kann sie trotzdem lohnen, indem sie eine ungefähre Vorstellung der Axiomatik vermittelt. Dabei zielt sie auf das Kapitel 7 hin, das den Gödelschen Beweis behandelt. In diesem geht es im Wesentlichen um selbstbezügliche Schleifen. Um herauszufinden, was dies ist,

lesen sie das Nachwort!

Wenn Sie dies hier lesen, dann sind Sie vermutlich kein Computer. Wenn dieses Spiel Sie erheitert hat, dann lohnt sich die Lektüre für Sie sicherlich. Bevor jetzt die eigentliche Arbeit beginnt, möchte ich Dr. sc. math. Peter Gallin und Marcel Meyer für die Betreuung meiner Arbeit (bzw. eigentlich für die Betreuung meiner selbst, denn es ist ja nicht der Text, der betreut wurde) danken. Als Letztes möchte ich nochmals darauf hinweisen, dass meine Arbeit nichts Neues enthält, sondern nur meine Erfahrungen bei der Entdeckung der Axiome in einer etwas geordneteren Form wiedergibt.

2 Einführung über Euklid

Die Wissenschaft besteht noch nicht sehr lange in der heutigen Form. Mathematik, Physik, Astronomie, Chemie usw. erlebten in den letzten Jahrhunderten unter anderem durch immer bessere Messgeräte und mechanisierte und später digitalisierte Rechenmaschinen eine grosse Blüte. Dieser Prozess setzte mit der Renaissance ein, der Zeit, als man sich die Wissenschaften der Griechen wieder in Erinnerung rief, nachdem sie im Mittelalter eher zurückgedrängt wurden. Die Griechen brachten die Wissenschaft hingegen zu einer ersten Blüte, auf die die heutige Wissenschaft, auch wenn sie auf den ersten Blick anders aussieht, aufbaut. Diese werden wir in der Hoffnung, dadurch für die heutige Wissenschaft dazuzulernen, etwas genauer untersuchen. Ein Gebiet, das die Griechen der Vollkommenheit sehr nahe brachten, ist die klassische Geometrie. Sie entwickelten sie so weit, dass relevante neue Erkenntnisse fast nur noch über modernere Formen der Geometrie[1] gewonnen werden können. Das System, das sie für die Geometrie aufbauten, wurde in die verschiedensten Wissenschaftszweige übersetzt, weshalb sich eine Betrachtung sicherlich auch für deren Verständlichkeit lohnt. Um das System, das die Griechen aufbauten, zu verstehen, werden wir es in diesem ersten Kapitel von Grund auf motivieren.

In der Geometrie geht es prinzipiell darum, irgendwelche Formen zu zeichnen. Die Griechen bemerkten natürlich, dass dazu einige Hilfsmittel besonders praktisch sind, die dann zu schöneren Formen führen. So zum Beispiel kann man eine gerade Linie besser mit einem Lineal zeichnen als von Hand, und einen Kreis zeichnet man am besten mit einem Zirkel oder einem Stück Schnur, welches dessen Rolle einnimmt. Sie bemerkten auch, dass man einige Formen mit einigen Hilfsmitteln zeichnen kann, andere nicht. Beispielsweise kann man einen Winkel mit Zirkel und Lineal nur halbieren, aber nicht dreiteilen[2]. Da liegt die Frage nahe, was man denn alles braucht, um einen Winkel zu halbieren. In der Schule haben wir dazu eine einfache Konstruktion gelernt[3]:

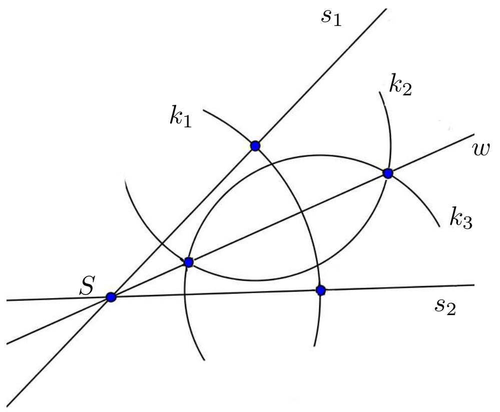

Abbildung 1: Winkelhalbierende

1. Man zeichne einen Kreis k_1 mit beliebigem Radius um den Scheitelpunkt S des Winkels mit den Schenkeln s_1 und s_2.

2. Man zeichne einen Kreis k_2 mit beliebigem Radius um den Schnittpunkt von k_1 und s_1.

3. Man zeichne einen Kreis k_3 mit dem selben Radius wie k_2 um den Schnittpunkt von k_1 und s_2.

[1] Wie zum Beispiel die in Kapitel 6 vorgestellte

[2] Man kann einen Winkel beispielsweise dritteln, wenn man auf dem Lineal eine Distanz abtragen kann oder andere Hilfsmittel zur Hand nimmt. Da wir allerdings das Lineal nur benützen, um Geraden zu zeichnen und auch ausser dem Zirkel keine weiteren Hilfsmittel zur Verfügung haben, können wir keinen Winkel dritteln.

[3] Alle Abbildungen: Eigenproduktion mit Geogebra und GIMP

4. Man zeichne eine Gerade w durch die zwei Schnittpunkte von k_2 und k_3[4].

5. Die Gerade w ist die gesuchte Winkelhalbierende des Winkels mit den Schenkeln s_1 und s_2.

Um herauszufinden, ob diese Konstruktion wirklich durchführbar ist, empfiehlt es sich, die einzelnen Arbeitsschritte weiter aufzuteilen. Denn je kleiner die Schritte sind, in die man die Konstruktion aufteilt, desto einfacher kann man an jedem einzelnen Schritt prüfen, ob er durchführbar ist. Wenn jeder Schritt durchführbar ist, dann ist es die ganze Konstruktion. Schritt 1 scheint schon so klein wie nur möglich zu sein. Schritt 2 und 3 kann man noch aufteilen in die Bestimmung der Schnittpunkte von k_1 und der beiden Schenkel und die Konstruktion der Kreis k_2 und k_3 und Schritt 4 in die Bestimmung der Schnittpunkte von k_2 und k_3 und das Legen einer Gerade durch diese beiden Schnittpunkte.
In diesen Schritten wird mehrmals das Gleiche getan, beispielsweise ein Kreis gezogen. Man kann sie also in eine Liste von notwendigen Minibedingungen zusammenfassen, die nötig sind, um einen Winkel zu halbieren:

- Man kann einen Kreis mit einem gegebenen Radius um einen Punkt ziehen (Schritt 1, 2, 3).
- Man kann die Schnittpunkte von einem Kreis und einer Geraden bestimmen (Schritt 2, 3).
- Man kann die Schnittpunkte von zwei Kreisen bestimmen (Schritt 4).
- Man kann eine Gerade durch zwei Punkte legen (Schritt 4).

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, dann kann man einen Winkel halbieren, da man dann die obige Konstruktion durchführen kann. Denn sie ist zerlegbar in eine Kette von Schritten aus der obigen Liste. Dabei stellen sich zwei Fragen:

1. Kann man die einzelnen Bedingungen noch weiter aufteilen?
2. Sind die Bedingungen erfüllt?

Gehen wir die Bedingungen einzeln durch und beantworten Frage 1 und 2.
Die Konstruktion eines Kreises um einen Punkt lässt sich nur schwerlich aufteilen, da man sie mit einem Zirkel mit einer einzigen Bewegung durchführen kann. Also brauchen wir einen Zirkel, damit die Bedingung erfüllt ist. Wir haben die Konstruktion mit Zirkel und Lineal durchgeführt. Also haben wir einen Zirkel, weshalb auch die Bedingung erfüllt ist.
Wie bestimmt man die Schnittpunkte eines Kreises und einer Geraden? Sie schneiden sich dort, wo sich ihre Linien treffen. Das müssen die Linien natürlich nicht unbedingt tun, doch wenn das der Fall ist, sieht man das auch sofort. Damit erkennt man die Schnittpunkte einfach, auch wenn es keine hat. Man erkennt dies in einem Schritt, also wird sich auch diese Bedingung nicht weiter aufteilen lassen.
Die Schnittpunkte von zwei Kreisen bestimmt man auf ähnliche Weise, wie die von einem Kreis und einer Geraden. Man sieht sie einfach.
Eine Gerade durch zwei Punke legt man, indem man ein Lineal an die Punke legt und mit einem Schreibwerkzeug dem Lineal entlang eine Linie zeichnet. Da das Lineal gerade ist, ergibt das eine gerade Linie, die durch beide Punkte verläuft. Da uns auch ein Lineal zur Verfügung steht, ist auch diese letzte Bedingung erfüllt. Ausserdem kann man die Gerade in einem Zug zeichnen, weshalb sich auch diese Bedingung nicht weiter aufteilen lassen wird.

Man stellt vielleicht fest, dass die Argumentationen etwas zweifelhaft sind und vor allem darauf beruhen, dass die Bedingungen einfach erfüllt sind. Um sicher zu sein, dass die Bedingungen erfüllt sind, müssten wir sie beweisen. Doch was ist ein Beweis eigentlich? In unserer Konstruktion sehen wir, dass er eine Aufsplittung in kleinere Schritte ist, die sich leichter auf ihre Richtigkeit prüfen lassen. Unsere Bedingungen sind aber schon so klein wie möglich, also kann man sie nicht

[4] Das bedeutet, dass der Radius von k_2 doch nicht so beliebig gewählt werden kann. Er muss mindestens so gross sein, dass k_2 und k_3 sich zwei mal schneiden (und nicht berühren).

aufsplitten. Somit können wir sie auch nicht beweisen, ohne sie selber zu verwenden. Nimmt man an, sie seien erfüllt, so beweisen sie sich direkt selber.
Es störte die Griechen natürlich, dass eine Konstruierbarkeit auf Bedingungen beruht, die alles andere als beweisbar sind. Deshalb führten sie die Evidenz ein. Die Evidenz ist nach Immanuel Kant eine "anschauliche Gewissheit"[5], was bedeutet, dass der evidente Satz unmittelbar einleuchtend ist, oder "es ist einfach so". So können wir mit einem Lineal einfach eine Gerade durch zwei Punkte legen, da gibt es nicht viel zu diskutieren, also ist es evident, dass man es kann. Alle unsere Bedingungen sind evident. Also kann man sie als erfüllt betrachten und auch alle ausschliesslich von ihrer Erfülltheit abhängenden Konstruktionen sind möglich.
Nun ist es aber auch so, dass eine Winkeldrittelung mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist. Kann man das mit evidenten Bedingungen zeigen? Das Problem dabei ist, dass man keine Konstruktion für einen dreigeteilten Winkel kennt. Würde man eine kennen, dann könnte man sie in Bedingungen zerlegen, die nicht alle erfüllt sind. Aber das schliesst dann nicht aus, dass es eine andere Konstruktion gibt, die evidente Bedingungen erfordert. Man kann auch einen halbierten Winkel so konstruieren, dass man die Mittel von Zirkel und Lineal überschreitet. Das bedeutet dann aber noch lange nicht, dass man einen Winkel nicht halbieren kann. Man müsste zeigen, dass *jede* Konstruktion mit dem Ziel der Winkeldrittelung mindestens eine Bedingung hat, die nicht erfüllt ist. Da es aber unendlich viele solcher Konstruktionen gibt, ist dies sehr schwierig[6]. Man kann mit solchen Bedingungen also nur zeigen, dass eine Konstruktion durchführbar ist, wenn man diese auch kennt.

Wenn man aber jede Konstruktion erst in Bedingungen aufteilen und dann diese auf ihre Evidenz prüfen muss, ist das sehr umständlich. Also setzten sich die Griechen zum Ziel, eine Sammlung von allen evidenten Bedingungen zu erstellen und dann von diesen auszugehen. Wenn man alle evidenten Bedingungen hat, dann kann man mit ihnen alle möglichen Konstruktionen durchführen. Der kontrollierende Charakter der Bedingungen wurde umgewandelt zu einem konstruierenden. Das bedeutet, dass man die Konstruktion nicht mehr in Bedingungen zerlegte, sondern vom Kleinen zum Grossen gehend die Bedingungen als Bausteine für eine Konstruktion verwendete. Dann weiss man schon von Beginn an, dass die Konstruktion möglich ist, da man sie aus ausschliesslich möglichen Teilschritten aufbaut. Dabei ist allerdings der Begriff "Bedingung"[7] etwas überholt, da er zu stark an eine Überprüfung erinnert. Deshalb ersetzen wir ihn durch einen Begriff, der besser Passt: "Das Axiom". Ein Axiom entspricht einer evidenten Bedingung, die nicht weiter zerlegbar ist, wobei es allerdings nicht wie eine Bedingung überprüft, sondern aufbaut. Eine Sammlung von Axiomen ist ein Axiomensystem, was man als Sammlung der verschiedenen Arten von Bausteinen betrachten kann.
Euklid von Alexandria hat ein Axiomensystem in "Die Elemente"[8] präsentiert, welches auch heute noch verwendet wird. Die Geometrie mit Zirkel und Lineal wurde auch fortan nach ihm "die Euklidische Geometrie"genannt. Seine Axiome waren die folgenden[9]:

1. Man kann durch zwei gegebene Punkte eine gerade Linie ziehen.
2. Man kann eine gegebene begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern.
3. Man kann um einen gegebenen Punkt einen Kreis mit einem gegebenen Radius ziehen.
4. Man kann zwischen gegebenen geraden Linien und Kreisen alle Schnittpunkte bestimmen.
5. Man kann zu einer gegebenen Geraden eine Parallele durch einen gegebenen Punkt ziehen.

[5] Zitat von [10]
[6] Der Beweis für die Unmöglichkeit einer Konstruktion zur Winkeldrittelung mit Zirkel und Lineal ist unglaublich kompliziert und gelang erst mit den 1830 von Evariste Galois geschaffenen Grundlagen. [11]
[7] Diesen habe ich selber eingeführt.
[8] Griechisch: stoicheia. Den Originaltext findet man in [15].
[9] [6] mit von mir angefügtem Parallelenaxiom. Unter [12] (oder [15] wenn man Griechisch spricht) findet man die Axiome in der Uraufstellung und anderer Form als Postulate wieder. Ich habe diese stark abgeänderte Form gewählt, da sie meinen Zweicken am ehesten entspricht.

Diese Axiome sind alle evident und nicht zerlegbar. Nicht zerlegbar bedeutet, dass ein Axiom nicht durch die anderen Axiome konstruiert werden kann. Dies ist daher wichtig, da man der Übersichtlichkeit zuliebe mit möglichst wenigen Axiomen auskommen will. Ist ein Axiom in die anderen zerlegbar, dann hat man mehr Axiome als nötig. Jetzt müssen einige Punkte geklärt werden.
Erstens ist der Begriff "gegeben"nicht ganz erklärt worden. Bei jeder Konstruktion geht man von irgend etwas aus, also z.B. von einem Winkel oder einer Länge. Dieses "irgend etwas" ist gegeben. Zudem ist auch das gegeben, was wir mit den Axiomen aus dem Gegebenen konstruieren. In unserer Konstruktion der Winkelhalbierenden verwendeten wir auch den Begriff "beliebig". "Beliebig" ist "allgemein" mit einigen Einschränkungen und kann nur verwendet werden, wenn es keine Rolle spielt, wie das Ergebnis geartet ist. Beispielsweise in Schritt 2 und 3 ist der Radius der Kreise k_2 und k_3 beliebig, solange sich die Kreise zwei mal schneiden (Einschränkung), da es keine Rolle spielt, ob der Radius $20cm$ oder $20km$ lang ist[10].
Zweitens sind die Begriffe "Punkt", "Gerade", "Kreis" etc. nicht definiert. Sie sind ja am Ende die Objekte, um die es geht. Da jedoch heute alle aus der Schule wissen, was mit den Begriffen gemeint ist, lassen wir Definitionen aus[11]. Weiteres dazu in Kapitel 6.
Drittens kann man mit den Axiomen selber eigentlich nicht viel machen. Es braucht einige Regeln, wie man sie verknüpfen kann. Ein Beispiel dafür ist die unter "erstens" aufgeführte Regel, dass die Resultate eines durchgeführten Axioms auch wieder gegeben sind.
Viertens kann man mit diesen Axiomen auch überhaupt nichts beweisen. Als Beispiel nehmen wir die Winkelhalbierende. Mit unseren Axiomen können wir die obige Konstruktion durchführen, doch das Resultat ist einfach irgend eine Gerade. Dass diese genau die Winkelhalbierende des Ausgangswinkels ist, muss man erst noch weiter beweisen. Dafür bedarf es eines mächtigeren Systems, das in der Lage ist, die Objekte der Geometrie distanzierter zu betrachten. Die Konstruktionen mit den euklidischen Axiomen haben keine Aussage, ob etwas eine Winkelhalbierende, ein Quadrat oder ein Elefant ist, da diese Begriffe für sie gar nicht existieren. Sie können nur sagen, dass es möglich ist, einige Punkte, Geraden und Kreise zu zeichnen, die dann ein Endresultat ergeben, von dem es aber nicht das Geringste sagt. Die Axiome sind also "sinnleer" in dem Sinne, dass sie nichts über die Anordnung von geometrischen Objekten sagen, sondern diese nur produzieren[12].

Die Axiome alleine sind also für Beweise untauglich, denn sie beschreiben nur eine Konstruktion und nicht deren Resultat. Doch sind sie für andere Systeme gut fassbar, da sie strukturiert sind, und ermöglichen so eine genauere Betrachtung der Geometrie.

[10] Mathematisch korrekt wäre es, den Abstand oder Punkt von Anfang an als gegeben zu betrachten.
[11] Die Definitionen kann man unter [15] nachlesen, wenn man Griechisch versteht.
[12] Im Urtext ist die Geometrie noch mit logischen Axiomen versehen, die ihr Beweise ermöglichen, welche wir jedoch nicht betrachten, um uns auf die Unterscheidung von System und Metasystem (siehe Kapitel 7) vorzubereiten.

3 Origami

Im letzten Kapitel gingen wir bei der Motivation der Axiome von gegebenen Mitteln, nämlich dem Zirkel und dem Lineal aus. Um zu verdeutlichen, dass andere Mittel andere Axiome verlangen, werden wir nun ein Axiomensystem für Origami, die asiatische Faltkunst untersuchen. Denn damit lernen wir, dass die Bezeichnung "Axiom" von den Mitteln abhängt und längst nicht überall den gleichen Sätzen zugeteilt werden darf.
Origami ist die Kunst, schöne Blumen und Drachen aus Papier zu falten und hat sogar schon in der Raumfahrt Anwendung gefunden, indem effiziente Falttechniken für Sonnensegel entwickelt wurden. Die Objekte von Origami sind Punkte und Falze, wie sie es in der euklidischen Geometrie Punkte, Geraden und Kreise sind. Ein Falz ist immer gerade, entspricht also der Gerade der euklidischen Geometrie.
Die Axiome von Origami sind wie die der Geometrie konstruktiv und es herrscht auch die Verknüpfungsregel, dass das Resultat[13] eines Axioms, das auf Gegebenes angewendet wird, auch wieder gegeben ist. Ausserdem ist die Spiegelung eines Punktes an einem Falz gegeben, da wir in Origami ja durch einen Falz alles auf seiner einen Seite auf seine andere spiegeln (und umgekehrt).
Origami hat folgende Axiome[14]:

1. Man kann den Falz durch zwei gegebene Punkte bestimmen.

2. Man kann den Schnittpunkt von zwei gegebenen Falzen bestimmen.

3. Man kann den Falz, der einen gegebenen Punkt auf einen anderen gegebenen Punkt legt, bestimmen.

4. Man kann den Falz, der einen gegebenen Falz auf einen anderen gegebenen Falz legt, bestimmen.

5. Man kann den Falz durch einen gegeben Punkt, der einen anderen gegebenen Punkt auf einen gegebenen Falz legt, bestimmen.

6. Man kann den Falz, der einen gegebenen Punkt auf einen gegebenen Falz und einen anderen gegebenen Punkt auf einen anderen gegebenen Falz legt, bestimmen.

Nun werden wir einzeln untersuchen, was diese Axiome bedeuten, denn in geschriebener Form sind sie etwas abstrakt[15].
Axiom 1 ist relativ klar verständlich. Man kann einen geraden Falz durch zwei Punkte ziehen, was dem euklidischen Axiom 1 entspricht.
Axiom 2 bedarf wohl auch keiner weiteren Erläuterung. Zu bemerken sei nur, dass sich zwei Falze nicht unbedingt schneiden müssen, da sie auch parallel sein können. Also kann das Resultat des Axioms auch kein Punkt, also nichts sein. Andererseits können die beiden Falze identisch sein. Dann ist das Resultat wiederum mit den ersten zwei Falzen identisch, also ein Falz.
Axiom 3 besagt, dass man mit einem Falz einen gegebenen Punkt auf einen anderen gegebenen Punkt legen kann. Eine kurze Überlegung zeigt, dass dieser Falz die Mittelsenkrechte der zwei Punkte ist. Wir bemerken, dass eine Mittelsenkrechte auch in der euklidischen Geometrie konstruierbar, aber kein Axiom ist. Das liegt daran, dass man in Origami andere Mittel zur Verfügung hat, als Zirkel und Lineal. Dies zeigt, dass Konstruktionen im einen System Axiome sein können, im anderen zerlegbar und nicht evident, wenn die Mittel verschieden sind[16].
Axiom 4 besagt, dass man mit einem Falz zwei andere Falze aufeinander legen kann. Dieser Falz

[13]Das Resultat ist als das zu verstehen, was wir mit einem Axiom direkt konstruieren, also einen Falz oder einen Punkt.

[14]Es existieren viele verschiedene Vorschläge für ein solches Axiomensystem. Ich habe dasjenige aus [7] gewählt, da es meinen Zwecken am ehesten dient. In Kapitel 5 werden wir es optimieren.

[15]Dem Leser sei zu empfehlen, ein Blatt Papier zur Hand zu nehmen und die beschriebenen Konstruktionen nachzufalten, da dies der Konkretisierung und somit dem Verständnis förderlich ist.

[16]In Kapitel 5 werden wir bezüglich Axiom 3 eines Besseren belehrt, doch der hier geschriebene Satz ist allgemein zu verstehen.

ist, schnell einsehbar, die Winkelhalbierende der beiden gegebenen Falze. Auch diese können wir aus den euklidischen Axiomen konstruieren. Nebenbei sei zu erwähnen, dass zu zwei sich schneidenden Geraden immer zwei Winkelhalbierende gelegt werden können, also hat dieses Axiom im Normalfall auch zwei mögliche Resultate. Schneiden sich die Falze nicht, dann sind sie parallel und das Resultat des Axioms ist eine Mittelparallele.
Axiom 5 ist das bisher komplizierteste und wird am besten durch Abb. 2 erklärt.

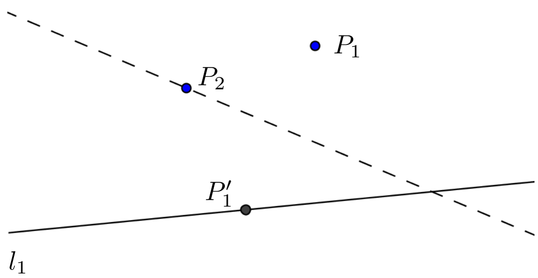

Abbildung 2: Origami: Axiom 5

Es sagt aus, dass man einen Falz durch P_2 ziehen kann, der P_1 auf l_1 legt. Doch was ist das genau? Für Axiom 3 und 4 konnten wir das Resultat als Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende ausmachen. Solch eine genaue Bezeichnung hier zu erreichen wäre von grossem Nutzen. Dazu können wir eine Übung machen.

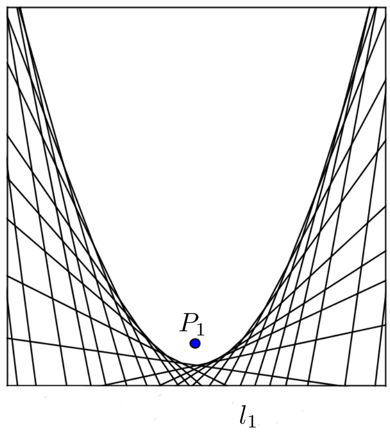

Abbildung 3: Interpretation von Axiom 5

Wir nehmen ein Blatt Papier zur Hand und wählen einen P_1 in der Nähe eines Randes gemäss Abb. 3. Dieser Rand ist dann l_1. Nun wählen wir ein P_2 irgendwo auf dem Blatt und legen einen Falz durch P_2, der P_1 auf l_1 legt, führen also Axiom 5 durch. Dann wählen wir P_2 irgendwo anders auf Blatt und widerholen Axiom 5 usw. Für einige P_2 gibt es kein Resultat, für nur sehr wenige

nur eines und für den Rest zwei Resultate. Wenn wir die Falze betrachten, dann erkennen wir, dass sie eine parabelförmige Fläche nicht durchqueren, jedoch immer deren Rand tangieren. Die gesuchte Bezeichnung des Resultats ist dementsprechend: eine Tangente durch P_2 an die Parabel mit Brennpunkt P_1 und Leitgeraden l_1.
Origami ist unfähig, das zu beweisen. Es kann lediglich einen Falz legen und hat keine Ahnung, was dieser ist. Man kann das Resultat von Axiom 5 auch in der euklidischen Geometrie konstruieren. Doch auch die euklidische Geometrie weiss nicht, was eine Parabel ist. Beweisen kann man diese Beziehung nur mit einem anderen, mächtigeren System. Dies lassen wir jedoch weg und betrachten das nächste Axiom.
Axiom 6 macht etwas Ähnliches wie Axiom 5, nur zwei mal. Dazu Abb. 4, um die Vorstellungskraft zu entlasten.

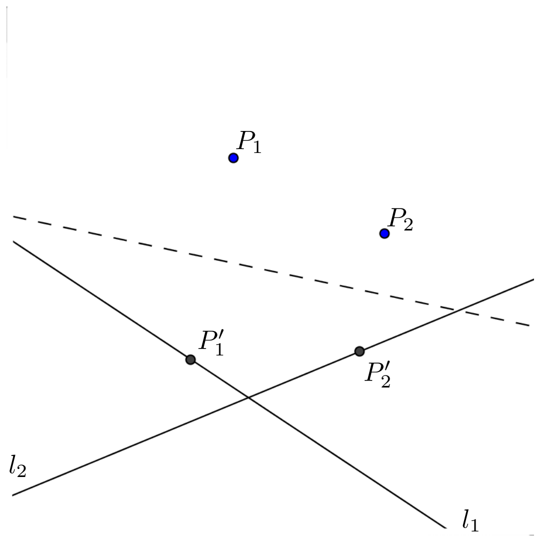

Abbildung 4: Origami: Axiom 6

Wenn wir Axiom 6 mit Axiom 5 vergleichen, so stellen wir fest, dass ersteres zwei mal einen Punkt auf einen Falz faltet. In Axiom 5 war der Falz, der diese Handlung vollzog, eine Tangente an die Parabel, welche durch den Punkt und den Falz definiert war, legte. Axiom 6 macht dies gleichzeitig für zwei Punkte mit je einem Falz. Wir können vermuten, dass wir damit einen Falz ziehen, der zwei Parabeln tangiert. Diese Vermutung erweist sich auch als richtig. Das Resultat von Axiom 6 ist: Die gemeinsame Tangente an die beiden Parabeln mit Brennpunkt P_1 bzw. P_2 und Leitgerade l_1 bzw. l_2. Dies können je nach Ausgangskonstellation kein, ein, zwei oder drei mögliche Falze sein. Abb. 5 zeigt eine Konstellation, in der 3 Tangenten gelegt werden können[17].

[17] Die Leitgeraden sind der Übersichtlichkeit wegen nicht eingezeichnet

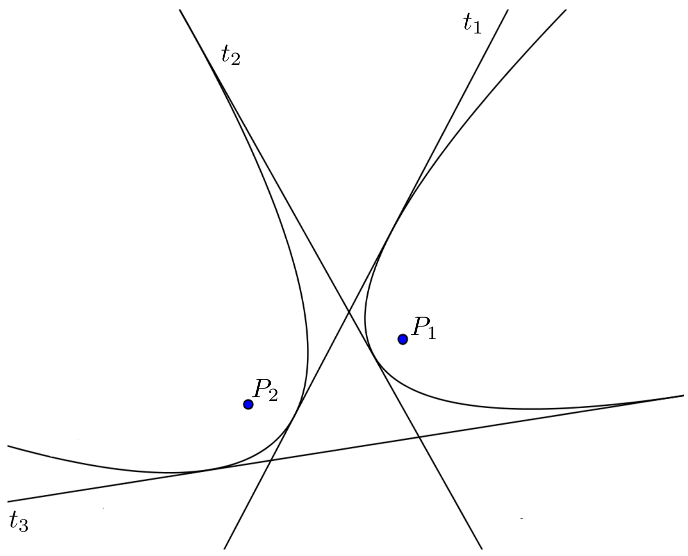

Abbildung 5: Drei Tangenten an zwei Parabeln

Eine solche Tangente zu legen ist in der euklidischen Geometrie nun nicht mehr möglich[18], was zu beweisen in den beiden Systemen allerdings unmöglich ist, da sie beide nicht wissen, was eine gemeinsame Tangente ist. Es ist also möglich, dass ein Axiom des einen Systems, ein einfacher Grundsatz, für ein anderes System zu kompliziert ist.

Mit diesen Axiomen kann man nun schöne Blümchen falten, auch wenn das System keine Ahnung von Blumen hat. Ob jetzt etwas eine Blume ist oder nicht, entscheidet dabei ein anderes System, das den Begriff "Blume"kennt. Dieses System ist meist der menschliche Geist.
Anhand von Origami sehen wir also, dass nicht nur die euklidische Geometrie auf Axiomen aufgebaut ist. Ausserdem haben wir bemerkt, dass der Titel "Axiom" für Sätze sehr abhängig vom System ist. Während im einen System ein Satz ein Axiom ist, ist er im anderen aus den Axiomen konstruierbar. Gleichzeitig kann jedoch ein Axiom aus dem anderen System für das eine System so komplex sein, dass es unmöglich zu konstruieren ist.

[18]Die Auswirkungen dieses Umstands verschieben wir auf Kapitel 4.

4 Vergleich Origami - Euklid

Nun, da wir zwei Axiomensysteme haben, liegt es nahe, diese zu vergleichen, um zu sehen, welches von beiden das mächtigere ist, also mit welchem System man mehr und kompliziertere Probleme lösen kann. Die euklidische Geometrie kann Punkte, Geraden und Kreise auf eine Ebene legen, Origami Punkte und Falze. Die Falze sind immer gerade [19], entsprechen also den Geraden der euklidischen Geometrie. Also agieren die beiden Axiomensystem zumindest mal mit ähnlichen Objekten.
Um Axiomensysteme zu vergleichen, brauchen wir ein Referenzsystem, in dem wir die Konstruktionsmöglichkeiten der beiden Systeme vergleichen. Für dieses wähle ich die Algebra, indem ich ein kartesisches Koordinatensystem über die Ebene lege und die Objekte darin in Gleichungen übersetze.

- Ein Punkt entspricht einem Koordinatenpaar (u, v)[20].
- Eine Gerade bzw. ein Falz entspricht einer linearen Gleichung
$$y = a \cdot x + b.$$
- Ein Kreis entspricht einer quadratischen Gleichung[21]
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Nun übersetzen wir die Axiome in die Algebra. Dabei beginnen wir bei denen von Euklid.
Das erste Axiom lautet: "Man kann durch zwei gegebene Punkte eine gerade Linie ziehen.". In die Algebra übersetzt bedeutet es, dass man aus zwei allgemeinen[22] Koordinatenpaaren eine lineare Gleichung extrapolieren kann[23].

$$(u, v), (w, q) \to y = a \cdot x + b$$

Das zweite Axiom lautet: "Man kann eine gegebene begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern.". Eine begrenzte gerade Linie ist in der Algebra eine lineare Gleichung für die gerade Linie und eine Ungleichung für die Beschränkung dieser Geraden, also ein Paar

$$(y = a \cdot x + b, \quad c \leq x \leq d).$$

Das Axiom ist nun in der Lage, die Grenzen von x zu erweitern oder zu vergessen (also die Gerade ins Unendliche zu verlängern) und hat als Resultat wieder eine lineare Gleichung und eine Ungleichung. Das praktischste ist wohl, die Gerade immer gleich ins Unendliche zu verlängern.

Axiom 3 lautet: "Man kann um einen gegebenen Punkt einen Kreis mit einem gegebenen Radius ziehen." und ist in der Lage, aus einem Koordinatenpaar und einem Parameter eine quadratische Gleichung der folgenden Form zu konstruieren:

$$(a, b), \quad r \quad \to \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Das vierte Axiom lautet: "Man kann zwischen gegebenen geraden Linien und Kreisen alle Schnittpunkte bestimmen.". Um dieses Axiom in die Algebra zu übersetzen, muss man es aufteilen in

[19] Wären sie nicht gerade, so könnte man das Papier nicht falten.
[20] Der Definitionsbereich aller Parameter ist $\mathbb{R}$. Für den Steigungsparameter von Geraden ist er speziell $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, um auch senkrechte Geraden zu erlauben.
[21] Das Koordinatenpaar des Mittelpunktes des Kreises ist (a, b), sein Radius r.
[22] Es gibt bei den meisten Axiomen Spezialfälle, welche andere Resultate als die angegebenen hervorbringen. Im Beispiel von Axiom 1 können die beiden Punkte identisch sein. Dann kann man beliebig viele verschiedene Geraden durch sie legen. In anderen Axiomen wird durch mehrere angegebene Lösungen die Maximalanzahl der Lösungen bezeichnet. Ich gebe diese Spezialfälle im Folgenden nicht an, der Leser sei sich jedoch bewusst, dass es sie gibt.
[23] Ich gebe das Resultat jeweils nur schematisch an, da eine Darstellung in den Ausgangsparametern weder relevant, noch übersichtlich wäre. Wichtig ist, dass man die Umformungen durchführen kann und welcher Art das Resultat ist.

die Bestimmung der Schnittpunkte zweier Geraden, einer Geraden und eines Kreises und zweier Kreise.
Den Schnittpunkt zweier Geraden zu bestimmen entspricht der Auflösung eines Gleichungssystems in zwei Variablen mit zwei linearen Gleichungen. Im allgemeinen Fall erhält man ein Koordinatenpaar.

$$\begin{aligned} y &= a \cdot x + b \\ y &= c \cdot x + d \\ \rightarrow & \quad (u, v) \end{aligned}$$

Den Schnittpunkt einer Geraden und eines Kreises zu bestimmen entspricht der Auflösung eines Gleichungssystems in zwei Variablen mit einer linearen und einer quadratischen Gleichung. Im allgemeinen Fall erhält man zwei mögliche Koordinatenpaare.

$$\begin{aligned} y &= a \cdot x + b \\ r^2 &= (x-c)^2 + (y-d)^2 \\ \rightarrow \ (u_1, v_1), & \quad (u_2, v_2) \end{aligned}$$

Und schliesslich der Schnittpunkt zweier Kreise entspricht der Auflösung eines Gleichungssystems in zwei Variablen mit zwei quadratischen Gleichungen. Normalerweise erhält man auch hier zwei mögliche Lösungen.

$$\begin{aligned} (r_1)^2 &= (x-a)^2 + (y-b)^2 \\ (r_2)^2 &= (x-c)^2 + (y-d)^2 \\ \rightarrow \ (u_1, v_1), & \quad (u_2, v_2) \end{aligned}$$

Das fünfte Axiom lautet: "Man kann zu einer gegebenen Geraden eine Parallele durch einen gegebenen Punkt ziehen.". Also kann man eine Gerade so verschieben, dass sie auf einem bestimmten Punkt zu liegen kommt[24]. Also:

$$(u, v), \quad y = a \cdot x + b \quad \rightarrow \quad y = a \cdot x + c$$

Das Wesentliche zusammenfassend kann man sagen, dass die Euklidische Geometrie algebraisch gesehen in der Lage ist, aus Koordinatenpaaren lineare und quadratische[25] Gleichungen zu konstruieren und aus linearen und quadratischen Gleichungssystemen Koordinatenpaare abzuleiten. Dies entspricht dem Finden von Lösungen von Gleichungen bis zum Grad 2.

Nun betrachten wir die Axiome von Origami.
Das erste Axiom lautet: "Man kann den Falz durch zwei gegebene Punkte bestimmen." und entspricht dem Axiom 1 der Euklidischen Geometrie. Also kann man aus zwei Koordinatenpaaren eine lineare Gleichung ableiten.

$$(u, v), (w, q) \rightarrow y = a \cdot x + b$$

Das zweite Axiom lautet: "Man kann den Schnittpunkt von zwei gegebenen Falzen bestimmen." und entspricht dem ersten Teil von Axiom 4 der Euklidischen Geometrie. Man kann aus zwei linearen Gleichungen in der Regel ein Koordinatenpaar konstruieren.

$$\begin{aligned} y &= a \cdot x + b \\ y &= c \cdot x + d \\ \rightarrow & \quad (u, v) \end{aligned}$$

[24]Eine einfache Variante, dies zu tun, ist, die x-Koordinate für die Variable x in die Gleichung der Geraden einzusetzen und die Differenz des erhaltenen y-Wertes und der y-Koordinate des Punktes zur rechten Seite der Geradengleichung zu addieren.
[25]Genauer: quadratische Gleichungen der Form $y = \sqrt{r^2 - (x-a)^2} + b$.

Das dritte Axiom lautet: "Man kann den Falz, der einen gegebenen Punkt auf einen anderen gegebenen Punkt legt, bestimmen." bzw. "Man kann zu zwei Punkten die Mittelsenkrechte legen.". Also kann man im Wesentlichen eine lineare Gleichung aus zwei Koordinatenpaaren konstruieren.

$$(u, v), (w, q) \rightarrow y = a \cdot x + b$$

Das vierte Axiom lautet: "Man kann den Falz, der einen gegebenen Falz auf einen anderen gegebenen Falz legt, bestimmen." bzw. "Man kann die Winkelhalbierenden von zwei sich schneidenden Geraden bestimmen.". Dies ist im Wesentlichen die Konstruktion einer linearen Gleichung aus zwei anderen linearen Gleichungen. Diese Konstruktion kommt allerdings dem Lösen einer quadratischen Gleichung gleich. Dies erkennt man primär daran, dass das Axiom allgemein zwei mögliche Resultate hat. Ausserdem können wir uns daran erinnern, dass wir im Kapitel 1 diese Konstruktion in der Euklidischen Geometrie unter Verwendung von mehreren Kreisen durchführten, deren Schnittpunkte wir bestimmen mussten, was der Lösung einer Gleichung zweiten Grades gleichkommt[26].

$$\begin{aligned} y &= a \cdot x + b \\ y &= c \cdot x + d \\ \rightarrow y &= e_{1,2} \cdot x + f_{1,2} \end{aligned}$$

Das fünfte Axiom lautet: "Man kann den Falz durch einen gegeben Punkt, der einen anderen gegebenen Punkt auf einen gegebenen Falt legt, bestimmen." bzw. "Man kann eine Tangente durch eine bestimmten Punkt an eine Parabel legen.". Man konstruiert also aus zwei Koordinatenpaaren und einer linearen Gleichung eine weitere lineare Gleichung. Auch diese Konstruktion kommt dem Lösen einer quadratischen Gleichung gleich, was man einerseits an den zwei Lösungsmöglichkeiten erkennt, andererseits daran, dass eine Parabel der Graph einer quadratischen Gleichung ist.

$$\begin{aligned} & (u, v) \\ & (w, q) \\ y &= a \cdot x + b \\ \rightarrow y &= c_{1,2} \cdot x + d_{1,2} \end{aligned}$$

Das sechste Axiom lautet: "Man kann den Falz, der einen gegebenen Punkt auf einen gegebenen Falz und einen anderen gegebenen Punkt auf einen anderen gegebenen Falz legt, bestimmen." bzw. "Man kann an zwei Parabeln eine gemeinsame Tangente legen". Man konstruiert aus zwei Koordinatenpaaren und zwei linearen Gleichungen eine lineare Gleichung. Dies kommt der Lösung einer Gleichung bis zum vierten Grad gleich. Zwar gibt es nur Konstellationen, bei denen es drei mögliche Resultate gibt, doch mindestens eine Lösung ist immer komplex. Ein mathematischer Beweis dazu ist etwas langfädig, weshalb wir dieser Aussage hier einfach Glauben schenken.

$$\begin{aligned} & (u, v) \\ & (w, q) \\ y &= a \cdot x + b \\ y &= c \cdot x + d \\ \rightarrow y &= e_{1,2,3,4} \cdot x + f_{1,2,3,4} \end{aligned}$$

[26] Analytisch kann man die Gleichung der Winkelhalbierenden einfach mittels Vektorgeometrie berechnen. Der normierte Normalenvektor $\vec{n_0}$ der Winkelhalbierenden hat die Richtung der Summe der normierten Normalenvektoren der beiden Ausgangsgeraden und den Betrag 1. Dann muss man nur noch in der Hesseschen Normalform $\vec{p} \cdot \vec{n_0} = d$ der Winkelhalbierendengleichung mit $\vec{p}$ als Ortsvektor eines Geradenpunktes und d als Abstand der Geraden vom Ursprung den Ortsvektor des Schnittpunktes der beiden Ausgangsgeraden gleich $\vec{p}$ setzen, um d zu erhalten. Damit hat man dann die Gleichung der Winkelhalbierenden in der Hesseschen Normalform. Zwei Lösungen erhält man dabei dadurch, dass man die normierten Normalvektoren der Ausgangsgeraden auch voneinander subtrahieren kann, um einen Normalvektor zur Winkelhalbierenden zu erhalten.

Origami kann also im Wesentlichen algebraisch gesehen lineare Gleichungen aus Koordinatenpaaren und anderen linearen Gleichungen konstruieren und aus allgemeinen Gleichungen bis zum Grad 2 lineare Gleichungen oder Koordinatenpaare ableiten. Dies entspricht dem Finden von Lösungen von Gleichungen bis zum Grad 4.

Vergleichen wir Origami mit der Geometrie Euklids. Euklids Geometrie ist in der Lage, Gleichungen bis zum Grad 2, Origami hingegen nur lineare zu konstruieren. Auf der anderen Seite kann Origami für Gleichungen bis zum Grad 4 Lösungen finden, Euklids Geometrie nur für Gleichungen bis zum Grad 2.
Dass Euklids Geometrie Gleichungen höheren Grades als Origami konstruieren kann, bedeutet, dass sie Kreise zeichnen kann und Origami nicht. Dass Origami höhergradige Gleichungen lösen kann als Euklids Geometrie ist seinem Axiom 6 zu verdanken. Die Folge dessen ist, dass Origami viele Probleme lösen kann, die für die Geometrie zu schwierig sind. Dies macht das Axiomensystem von Origami mächtiger, als das von Euklid, auch wenn Euklids Geometrie eine grössere Auswahl an Objekten hat.

Ein Beispiel dafür ist die in Kapitel 2 erwähnte Winkeldrittelung. Die Drittelung eines Winkel kommt dem Auffinden von Lösungen einer Gleichung dritten Grades gleich. Euklids Geometrie kann solch eine Gleichung nicht lösen, Origami hingegen schon. Abb. 6 zeigt eine Möglichkeit dafür.

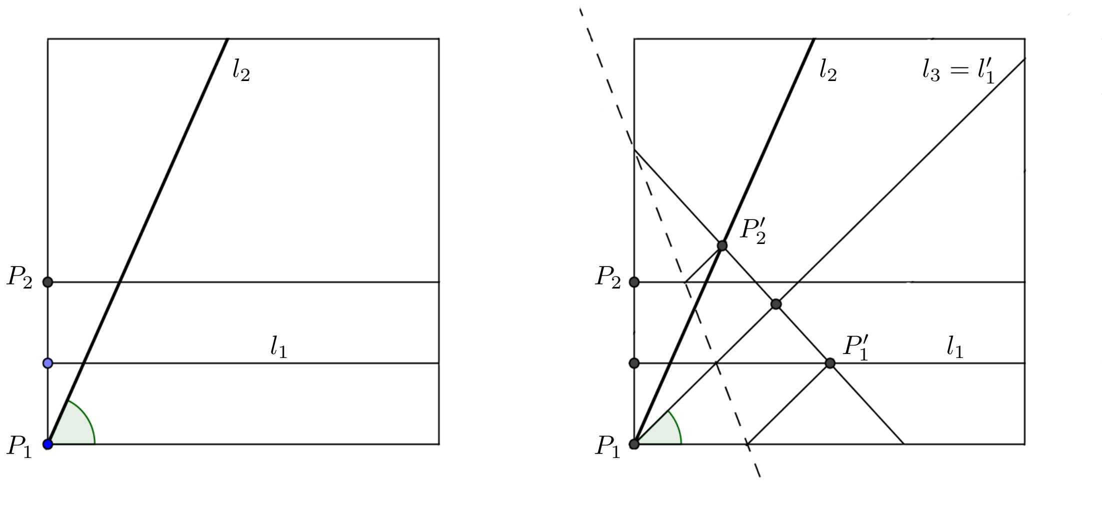

Abbildung 6: Winkeldrittelung

Der zu drittelnde Winkel wird durch l_2 und den unteren Rand eines quadratischen Blattes begrenzt, die untere linke Ecke P_1 ist der Scheitelpunkt des Winkels. Wir falten l_1 und einen zweiten Falz parallel zum unteren Rand des Blattes, sodass l_1 zum unteren Rand und der anderen Parallelen den gleichen Abstand hat. P_2 ist der Schnittpunkt der anderen Parallelen und dem linken Rand. Nun führen wir Axiom 6 durch, indem wir P_1 auf l_1 und gleichzeitig P_2 auf l_2 legen. Danach verlängern wir den gefalteten Teil von l_1 zu l_3. Dieser neue Falz l_3 begrenzt nun zusammen mit l_2 einen Winkel, der exakt einen Drittel so gross ist, wie der ursprüngliche Winkel[27].

[27]Der Beweis dafür findet sich im Anhang B.

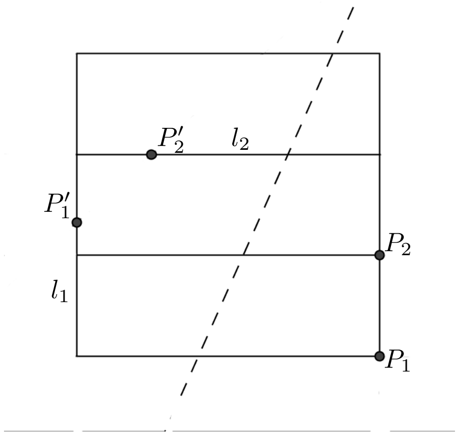

Abbildung 7: Konstruktion von $\sqrt[3]{2}$

Ein weiteres Beispiel ist die Aufgabe, die das Orakel von Delphi den Bewohnern der Insel Delos zur Eindämmung einer Pestepidemie stellte: Man solle das Volumen des würfelförmigen Altars im Tempel von Apollon verdoppeln. Das bedeutete, dass man die Seitenlänge des neuen Würfels kennen muss, welche $\sqrt[3]{2}$ mal so lang ist, wie die des alten[28]. Diese Aufgabe ist für die Euklidische Geometrie unlösbar, da die Konstruktion der Lösung der Gleichung $x^3 = 2$ gleich kommt. Origami ist allerdings dazu in der Lage. Abb. 7 zeigt einen Weg dazu. Man geht dabei von einem quadratischen Blatt aus, das man in drei gleich grosse Rechtecke teilt. Man wählt l_1, l_2, P_1 und P_2 gemäss Abbildung und führt Axiom 6 durch, indem man P_1 auf l_1 und P_2 auf l_2 legt. Der neu erhaltene Punkt P_1' teilt die linke Seite des Blattes in zwei Teile, wobei der obere Teil genau $\sqrt[3]{2}$ mal so lang ist, wie der untere Teil[29]. Das Längenverhältnis kann man dann unter Verwendung des Strahlensatzes so strecken, dass der untere Teil genau so lange ist, wie eine Kante des Ausgangswürfels. Am mitgestreckten oberen Teil kann man ablesen, wie lange eine Kante des neuen Würfels sein muss.

Damit sehen wir, dass ein System mit komplizierteren Zeichen nicht unbedingt mächtiger sein muss, als ein solches mit einfacheren. Denn Euklids Geometrie kann Kreise, Geraden und Punkte zeichnen, Origami nur Geraden und Punkte. Dabei sind Kreise komplizierter als Geraden und Punkte. Trotzdem ist Origami offensichtlich in gewisser Hinsicht mächtiger als die Geometrie Euklids, da es schwierigere Aufgaben lösen kann.

[28] Zu finden in [14]

[29] Der Beweis dafür findet sich im Anhang C.

5 Korrektheit eines Axiomensystems

In den letzten Kapiteln haben wir ausführlich zwei Axiomensysteme untersucht und miteinander verglichen. Dabei gingen wir davon aus, dass die Axiomensysteme unanfechtbar seien. Wird man mit einem Axiomensystem konfrontiert, so muss man einige Punkte prüfen, bevor man mit ihm arbeiten kann.
Den ersten Punkt kennen wir bereits. Man muss prüfen, ob im Axiomensystem ein Axiom durch die anderen Axiome konstruiert werden kann. Ist dies möglich, dann sind die Folgen relativ harmlos, denn man kann den Satz, der sich als Axiom ausgab, aber keiner ist, einfach aus dem System entfernen und erhält ein neues System. Dieses ist genau so mächtig, wie es das alte war, da das entfernte "Axiom" ja aus den übrigen Axiomen konstruiert werden kann. Damit verliert das System keine Konstuktionsmöglichkeiten.
Auch den zweiten Punkt kennen wir. Man muss prüfen, ob die Axiome wirklich evident sind. Damit (und mit dem ersten Punkt) befasst sich das nächste Kapitel. Diese zwei Punkte prüfen die Korrektheit der Axiome, denn wir haben ein Axiomensystem so definiert, dass die Axiome evident sind und sich nicht gegenseitig konstruieren können. Mit den ersten zwei Punkten haben wir die beiden Kriterien für ein Axiomensystem überprüft.
Dann muss man herausfinden, wie mächtig das Axiomensystem ist. Euklids Axiomensystem hat beispielsweise die Macht, für Gleichungen zweiten Grades Lösungen zu finden, Origami für Gleichungen vierten Grades. Ganz bequem ist natürlich ein System mit unbeschränkter Macht. Also für die Geometrie ein System, das alles konstruieren kann. Ein solches System wird dann "vollständig" genannt. Dieser Punkt wird in Kapitel 7 ausgeführt. In diesem Kapitel wird auch die Widersprüchlichkeit eines Systems untersucht, welche für die Geometrie jedoch keine Rolle spielt, da es in ihr keine Widersprüche gibt[30].

Unser System von Origami erfüllt gleich den ersten Punkt nicht. Das heisst, dass es ein Axiom geben muss, das aus den anderen konstruierbar ist. Dieses Axiom ist dasjenige, das einen Falz bestimmt, der einen gegebenen Punkt auf einen anderen gegebenen Punkt legt bzw. eine Mittelsenkrechte konstruieren kann, also Axiom 3. Dieses können wir leicht aus den anderen Axiomen konstruieren. Anhand von Abb. 8 können wir dies verfolgen.

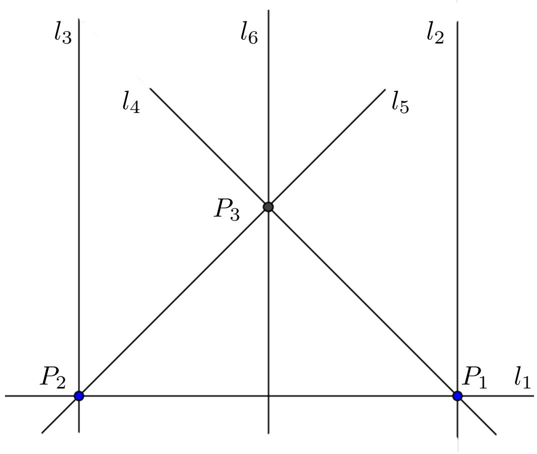

Abbildung 8: Konstruktion einer Mittelsenkrechten

Ich verwende die Axiome mit der in Kapitel 3 eingeführten Nummerierung. Die Konstruktion geht

[30] Jedenfalls nicht in der Geometrie, wie wir sie eingeführt haben. Wenn man sie so erweitert, dass sie Beweise führen kann, dann könnten Widersprüche möglich sein.

von zwei Punkten P_1 und P_2 aus. Mit Axiom 1 können wir einen Falz l_1 durch diese zwei Punkte legen.
Jetzt wollen wir senkrechte Falze durch P_1 und P_2 zu l_1 falten. Dies tun wir mit Axiom 5, indem wir den Falz bestimmen, der durch P_1 bzw. P_2 geht und P_2 bzw. P_1 auf l_1 legt. Wir erinnern uns allerdings auch daran, dass Axiom 5 im Normalfall 2 Resultate hat. In diesem Fall sind diese zwei möglichen Resultate die gesuchten Senkrechten und l_1 selber. Denn ein Falz faltet jeden auf sich liegenden Punkt auf sich selber. P_1 und P_2 liegen auf l_1, also muss l_1 ein mögliches Resultat von Axiom 5 sein. Eine Senkrechte zu einem Falz faltet auch den Falz auf sich selber, weshalb auch die gewünschten Senkrechten Resultate sein müssen. Betrachtet man Axiom 5 als das Legen einer Tangente an die Parabel mit Brennpunkt P_1 bzw. P_2 und Leitgerade l_1, so muss man bedenken, dass der Brennpunkt auf der Leitgeraden der Parabel liegt, also die Parabel zur Halbgeraden entartet ist, welche senkrecht zu l_1 steht und bei P_1 bzw. P_2 beginnt. Von den zwei Tangenten ist dann eine Parallel zur Halbgeraden, eine geht durch ihren Scheitelpunkt, also den Startpunkt der Halbgeraden. Wir wählen diejenigen Lösungen, die nicht l_1 sind, also die Senkrechten dazu und nennen sie l_2 und l_3.
Nun bestimmen wir mit Axiom 4 die Winkelhalbierenden l_4 bzw. l_5 von l_1 und l_2 bzw. l_3. Die Winkel zwischen l_1 und l_4 bzw. l_5 betragen $45°$, da sie halbe rechte Winkel sind. Also bilden l_1, l_4 und l_5 ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse $\overline{P_1P_2}$. Den dritten Punkt P_3 dieses Dreiecks bestimmen wir mittels Axiom 2 als den Schnittpunkt von l_4 und l_5. Der Punkt P_3 ist nun gleich weit von P_1 wie von P_2 entfernt. Legen wir eine Senkrechte durch P_3 zu l_1, so ist das also die gewünschte Mittelsenkrechte, da sie senkrecht zur Strecke $\overline{P_1P_2}$, also zu l_1 steht und ein Punkt davon gleich weit von den beiden Ursprungspunkten entfernt ist (wir wissen das von P_3).
Diese Senkrechte können wir wieder mittels Axiom 5 bestimmen, indem wir den Falz durch P_3 finden, der P_1 auf l_1 legt. Gleich wie bei der Konstruktion von l_2 und l_3 gibt es ein Resultat, das durch den Parabelscheitelpunkt P_1 geht (das wir nicht wollen) und eines, das senkrecht zur Leitgeraden l_1 steht (das wir wollen). Wir wählen nun dieses zweite mögliche Resultat und haben den gewünschten Falz l_6, der die Mittelsenkrechte von P_1 und P_2 ist. Eine alternative Konstruktion von l_6 ist die Verwendung von Axiom 4 auf l_4 und l_5, also die Bestimmung ihrer Winkelhalbierenden. Das erste mögliche Resultat von Axiom 4, das parallel zu l_1 ist, wählen wir nicht. Da das Dreieck $\triangle P_1P_3P_2$ gleichschenklig ist, steht die Winkelhalbierende des Winkels von P_3 senkrecht auf $\overline{P_1P_2}$ und ist also auch die gesuchte Mittelsenkrechte.

Wir können also mittels dieser Konstruktion das Axiom 3 aus den anderen Axiomen konstruieren. Die Konsequenzen für das Axiomensystem sind allerdings relativ gering. Man kann das Axiom 3 einfach entfernen und hat ein neues Axiomensystem mit nur 5 Axiomen, das gleich mächtig ist, wie das alte. Jedes Mal, wenn Axiom 3 verwendet würde, kann man statt dessen die obige Konstruktion durchführen. Dies ist etwas umständlich, doch durchaus möglich. Allgemein gesehen sind die Axiomensysteme für Origami in der Entwicklungsphase und längst nicht so weit ausgereift wie Euklids Geometrie[31]. Ein Axiomensystem zu erstellen ist also nicht ganz so leicht, wie es im ersten Kapitel den Schein hatte.

[31] Ein weiterer Verbesserungsvorschlag wäre, das Axiom 4 als Spezialfall von Axiom 6 zu betrachten, indem man die für Axiom 6 benötigten Punkte beliebig auf den verschiedenen Schenkeln des Winkels wählt. Oder Axiom 5 als Spezialfall von Axiom 6, indem man den Punkt, durch den man die Tangente legt, als zweiten Brennpunkt und die verbindende Gerade der beiden gegebenen Punkte als zweite Leitgerade betrachtet.

6 Evidenz eines Axioms

Der zweite in Kapitel 5 erwähnte Punkt ist die Überprüfung der Evidenz eines Axioms. Einfache Axiome kann man schnell auf ihre Evidenz prüfen, doch je komplexer sie werden, desto schwieriger sind sie auch einzusehen und somit ist ihre Evidenz fraglich. Axiom 6 von Origami beispielsweise sieht ausformuliert sehr viel komplizierter aus als mancher konstruierter Satz. Damit ist auch gleich seine Evidenz anzuzweifeln. Dieses Kapitel befasst sich jedoch nicht mehr mit Origami, sondern mit Euklids Geometrie, genauer: mit dessen Axiom 5. Dieses bezeichnet die Möglichkeit des Legens einer Parallelen zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt. Es hat nicht den einfachen Ein-Schritt-Charakter wie die übrigen Axiome, man muss sich also ernsthaft überlegen, ob es evident ist. Da zwei Geraden sich im Allgemeinen schneiden, ist es nicht unbedingt notwendig, dass es verschiedene Geraden gibt, die sich nicht schneiden. Ausserdem kann das Axiom nicht direkt mit Zirkel und Lineal gezeichnet werden. Da es aber nach kurzer Überlegung doch wahr ist, müsste es doch eigentlich aus den anderen Axiomen konstruierbar sein. Aus der Schule kennen wir sogar eine solche Konstruktion (siehe Abb. 9):

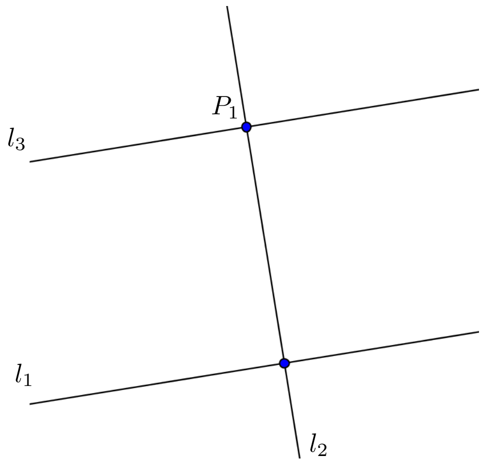

Abbildung 9: Parallelenkonstruktion

Man legt eine Senkrechte l_2 zur gegebenen Geraden l_1 durch den gegebenen Punkt P_1 (Die Konstruktion einer Senkrechten verläuft analog zur Konstruktion einer Winkelhalbierenden.). Dann legt man wiederum eine Senkrechte zur Geraden l_2 durch den Punkt P_1 und hat damit die gewünschte Parallele l_3 konstruiert.
Bei dieser Behauptung müssen wir aber aufpassen. Ist die konstruierte Gerade die gewünschte Parallele? Denn es ist nicht unbedingt notwendig, dass sich die beiden Geraden nicht schneiden. Genauso wie es nicht gesagt ist, dass die Konstruktion einer Winkelhalbierenden aus Kapitel 2 wirklich eine Winkelhalbierende konstruiert. Denn das Axiomensystem legt nur irgend eine Gerade und es ist ihm herzlich egal, ob sich diese Gerade mit einer anderen Geraden schneidet oder nicht. Also sind wir in eine Sackgasse geraten, indem wir die Bedeutung des Konstruierten aus dem Axiomensystem hinaus verlegten. Schon die Griechen störte diese Sackgasse. In der Uraufstellung der Euklidischen Axiome ist das Parallelenaxiom nicht enthalten, da sie daran glaubten, man könne eine Parallele aus den übrigen Axiomen konstruieren. Sie konnten das Problem aber nicht lösen und 2000 Jahre lang - bis ins letzte Jahrhundert hinein - widerstand das Parallelenaxiom allen Konstruktionsversuchen.

Um weiter zu kommen, müssen wir unseren Blickwinkel etwas weiten. Wenn das Parallelenaxiom tatsächlich allgemein aus den übrigen Axiomen folgt, dann gilt es überall, wo auch die anderen Axiome gelten. Das heisst auch in anderen Systemen wie zum Beispiel Origami. Wenn man alle Euklidischen Axiome in Origami konstruieren könnte, dann würde sicher auch das Parallelenaxiom gelten, da es dann konstruierbar wäre. Wenn man also im Gegenteil die Unabhängigkeit des

Parallelenaxioms von den anderen Beweisen will, so muss man nur eine Interpretation finden, in der alle anderen Axiome gelten und das Parallelenaxiom nicht. Dies ist viel einfacher, als die Abhängigkeit zu zeigen, da man für einen Abhängigkeitsbeweis alle möglichen Systeme untersuchen müsste, bzw. eine prinzipielle Abhängigkeit finden. Tatsächlich wurden im 19. Jahrhundert solche Geometrien gefunden. Da in ihnen andere Axiome als in jener von Euklid herrschen, nannte man sie die nichteuklidischen Geometrien. Eine davon ist die sogenannte elliptische Geometrie, welche die Ebene, wie wir sie kennen, durch eine Kugeloberfläche ersetzt. Ein Punkt ist ein Punkt auf dieser Kugeloberfläche, ein Kreis ist ein Kreis darauf und eine Gerade ist ein Kreis, der den selben Mittelpunkt und Radius wie die Kugel hat[32]. Die Gerade wird also zum Grosskreis, der Rest bleibt gleich. In Abb. 10 ist l_1 eine Gerade, k_1 ein Kreis.

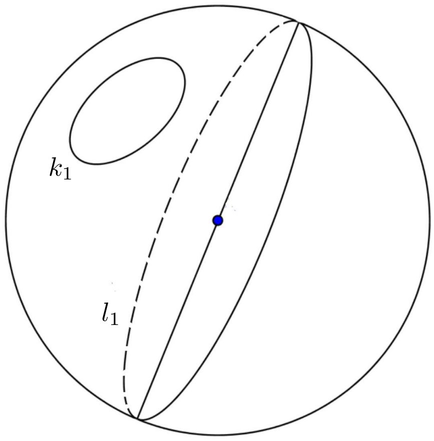

Abbildung 10: Geometrie auf der Kugeloberfläche

Einen Kreis kann man immer noch mit einem Zirkel konstruieren, doch für eine Gerade braucht es nun ein etwas spezielles Lineal. Die praktischste Variante ist wohl eine hohle Halbkugel, die man über unsere Kugel stülpen kann. Dann kann man am Rand dieser Halbkugel einen Strich zeichnen und hat die gewünschte "Gerade".
So ist auch gleich das erste Axiom wahr, denn man kann dieses "Lineal" an zwei Punkte legen, sodass die "Gerade" durch sie führt. Das zweite Axiom kann man auch mit diesem Werkzeug durchführen, denn es kann eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern. Auch dies können wir mit unserem "Lineal", indem wir zwei beliebige Punkte dieser begrenzten geraden Linie als gegeben betrachten und Axiom 1 durchführen. Das dritte Axiom sagt, dass man einen Kreis mit einem gegebenen Radius um einen gegebenen Mittelpunkt zeichnen könne. Da unser Zirkel seine Fuktion behalten hat, können wir dies ganz einfach mit ihm tun. Der Umfang und die Fläche des Kreises lassen sich aber nicht mehr mit den gewöhnten Formeln berechnen, da die Kugeloberfläche gewölbt ist. Eine weitere Kuriosität ist, dass jeder Kreis zwei Mittelpunkte (auf der Kugeloberfläche[33]) hat, die sich auf der Kugel genau gegenüberstehen. Das vierte Axiom bezeichnet die Bestimmbarkeit der Schnittpunkte von Kreisen und Geraden. Da auch unsere Geraden jetzt spezielle Kreise sind, müssen wir also nur Schnittpunkte zwischen Kreisen bestimmen. Dies ist wie auf der Ebene möglich, sofern sie sich schneiden. Zwei Geraden schneiden sich insbesondere genau zwei mal. Dies sieht man daran, dass eine "Gerade" der Schnitt von einer Ebene durch den Kugelmittelpunkt mit der Kugeloberfläche ist. Zwei nicht identische Ebenen durch den Kugelmittelpunkt sind sicher nicht parallel, da sie einen gemeinsamen Punkt - den Kugelmittelpunkt - haben und schneiden sich somit in einer Geraden. Diese Gerade mit der Kugeloberfläche

[32]Wenn man in der Raumgeometrie denkt, also nicht auf der Kugeloberflächengeometrie.
[33]Nicht in einer durch den Kreis gelegten "alten" Ebenen, sondern zwei Mittelpunkte für den Kreis auf unserer gekrümmten Ebene.

geschnitten ergibt die beiden Schnittpunkte zweier "Geraden". Somit ist Axiom 5, das Parallelenaxiom unmöglich durchzuführen, da es zwei Geraden, die sich nicht schneiden, voraussetzt.

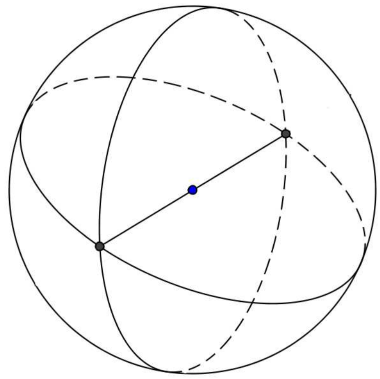

Abbildung 11: Schnittpunkte zweier "Geraden"

Also haben wir eine Geometrie gefunden, in der alle Axiome Euklids gelten ausser das Parallelenaxiom. Würde das Parallelenaxiom tatsächlich aus den anderen folgen, dann würde es auch auf der Kugeloberfläche gelten. Da es dies jedoch nicht tut, ist das Parallelenaxiom unabhängig von den anderen Axiomen. Das lässt uns stutzen, denn wir konnten ja auf der normalen Ebenen das Parallelenaxiom konstruieren. Das Problem bei einer Konstruktion ist, dass unsere Axiome keineswegs vollständig sind. Unsere Parallelenkonstruktion von vorhin ist zwar nur mit unseren vier ersten euklidischen Axiomen durchgeführt, doch der Beweis, dass die konstruierte Gerade wirklich eine Parallele ist, beruht auf mindestens einem anderen Axiom, das wir nicht kennen und das in unserem Axiomensystem eigentlich gar nicht gilt. Dieses Axiom, das für unser System nicht existiert, aber für einen Beweis ausserhalb des Systems relevant ist, gilt auf der Kugeloberfläche nicht mehr, sodass der Beweis nicht mehr durchgeführt werden kann. Damit, dass es auf der Kugeloberfläche keine Parallelen gibt, erkennen wir, dass der Beweis, dass die konstruierte Gerade eine Parallele ist, nicht nur von den übrigen Axiomen abhängt. Also muss das Parallelenaxiom ein Axiom sein. Denn wäre es keines, dann müsste es aus dem Axiomensystem Euklids entfernt werden und das System würde an Mächtigkeit verlieren. Damit haben wir aber ein Axiom im System, das nicht evident ist. Dies zeigt uns, dass die Evidenz zwar ein sehr elegantes, doch in manchen Fällen untaugliches Kriterium für Axiome ist. Die Mathematiker strichen deshalb die Evidenz aus den Kriterien für Axiome. Übrig bleibt das Kriterium der Unableitbarkeit. Ein Axiomensystem ist also nur noch eine Sammlung von Sätzen, die sich nicht gegenseitig konstruieren können. Je geschickter man diese wählt, desto mächtiger wird das System. Wenn einer dieser Sätze evident ist, dann ist dies höchstens für die Verständlichkeit des Systems relevant, doch für das System selber ändert es nichts. Damit gibt das System allerdings auch jeden Realitätsbezug ab, denn es widerspiegelt nicht das, was in der Realität mit realen Mitteln möglich ist, sondern kann nur noch die Dinge konstruieren, die möglich wären, falls die Axiome gelten. Dies müssen diese je nach Interpretation jedoch nicht tun. Damit grenzt sich die Geometrie[34] von den Naturwissenschaften ab, denn jene haben die Aufgabe, die Realität zu beschreiben. Die mathematischen Systeme, die sie verwenden entsprechen jedoch niemals der Realität, sondern nähern sich dieser nur an. So spielt es auch keine grosse Rolle, ob die Axiome in der Realität auf der Kugeloberfläche konstruiert werden können. Für das System existiert die Realität nämlich nicht.

Das Mittelsenkrechtenaxiom von Origami ist ebenfalls nicht zwingend aus den anderen konstruierbar, denn wir haben nur in einer Interpretation der Axiome gezeigt, dass wir einen Falz legen

[34]Und alle übrigen Teilgebiete der Mathematik

können, der zufälligerweise mit dem Resultat von Axiom 3 zusammenfällt, was wir allerdings nicht bewiesen, sondern nur behauptet haben. Um wirklich verlustfrei das Axiom 3 zu eliminieren, müssten wir zeigen, dass es in allen möglichen Interpretationen konstruierbar ist. Dies ist jedoch unglaublich schwierig, denn man müsste ein System finden, in dem ausschliesslich die übrigen Axiome gelten und alle aus ihnen konstruierbaren Sätzen. Also ein System, das vollständig durch die übrigen Axiome beschrieben wird.

7 Der Gödelsche Satz

7.1 Problemstellung

Wir sahen in den vorherigen Kapiteln, dass die Methode der Axiome sehr stark ist. Sie erlaubt eine gewisse Struktur bei der Arbeit mit der Geometrie. Bis vor (historisch) relativ kurzer Zeit ist es auch bei der Geometrie geblieben. Doch vor etwas mehr als hundert Jahren begannen die Mathematiker über die Mathematik als solche nachzudenken. So fragten sie sich beispielsweise, was denn nun genau ein Beweis sei. Beweise wurden schon tausende von Jahren geführt, aber es hat sich niemand strukturiert damit befasst, was allgemein einen Beweis ausmacht. Dabei bemerkten die Mathematiker, dass in der Geometrie von Euklid viele dieser Fragen sehr einfach mit den Axiomen geklärt wurden. Also versuchten sie, die Idee des Axioms auf die Mathematik zu übertragen. Wichtige Namen dabei sind Georg Cantor, der 1877 die Mengenlehre[35] begründete und axiomatisierte und Giuseppe Peano, der 1889 das erste Axiomensystem für die natürlichen Zahlen lieferte[36].
Die Mathematiker fingen also an, die Mathematik in Axiomensysteme zu übersetzen. Dabei traten jedoch Probleme auf. Schon der Kreter Epimenides sagte "Alle Kreter lügen." und sprach somit ein Paradoxon aus. Denn er war ein Kreter, also ist sein Satz eine Lüge. Deshalb ist eigentlich die Aussage "Alle Kreter sprechen die Wahrheit." wahr. Folglich ist Epimenides' Satz wahr, weshalb er aber auch gleich wieder eine Lüge ist. Das Problem dabei ist, dass der Satz auf sich selber Bezug nimmt. Er wäre völlig problemlos, wenn die Herkunft von Epimenides unbekannt wäre.
Solche Selbstbezüglichkeiten traten auch in der Mathematik auf. So zum Beispiel ist in Cantors Mengenlehre "die Menge aller Mengen, die sich selber nicht enthalten" ein solches Paradoxon[37]. Man kann nicht entscheiden, ob diese Menge sich selber enthält, denn tut sie dies, so auch gleich wieder nicht, was dazu führt, dass sie es tut.
Das Problem wurde mit der Einführung der Metamathematik[38] vorläufig gelöst. Die Metamathematik ist alles, worin man über die Mathematik spricht. So ist die Formel $0 = 0$ eine mathematische, doch der Satz "$0 = 0$ ist eine mathematische Formel." ist metamathematisch. Was nun in die Metamathematik gehört, ist dem Bereich der Mathematik entzogen.
Im Fall von Epimenides löst dies das Paradoxon auf. Der Satz "Alle Kreter lügen." gehört zur Sprache. Der Satz "Epimenides ist ein Kreter." gehört auch zur Sprache, wenn man ihn einzeln betrachtet. Aber der Satz "Der Mann, der 'Alle Kreter lügen.' sagt, ist selber ein Kreter." gehört in die Metasprache[39], da der Umstand, dass Epimenides ein Kreter ist, auf einen Satz der Sprache bezogen ist. Somit vermischt das Paradoxon von Epimenides die Sprache mit der Metasprache, also ist es ungültig und man kann den Satz "Alle Kreter lügen, sagt der Kreter" eigentlich gar nicht sagen.
Ähnlich verläuft das Ausschalten von Paradoxa in der Mathematik. Jedes Paradoxon bezieht sich in irgend einer Form auf sich selber, ist also eigentlich ein metamathematischer Satz und somit ungültig.
Das scheint verwunderlich, denn Epimenides konnte seinen Satz sagen und der Gedankengang kann vollzogen werden, obwohl er ungültig ist. In unserem alltäglichen Denken unterscheiden wir nicht gross zwischen Überlegung und Metaüberlegung. Doch die Mathematiker wollten primär ein mathematisches System, das unabhängig von der Metamathematik korrekt ist. Die Metamathematik war sozusagen ein System, in das man alle Widersprüche abschob.
Trotz diesen Problemen glaubten die meisten daran, dass es möglich sei, einen vollständigen und widerspruchsfreien Kalkül für die Mathematik und Logik zu erstellen. Ein Kalkül ist ein Axiomensystem (z.B. die Euklidische Geometrie) zusammen mit definierten Zeichen (Punkt, Kreis, Gerade), Kombinationsregeln für diese Zeichen (z.B. eine Gerade besteht aus unendlich vielen Punkten) und Ableitungsregeln (z.B. das Resultat eines auf Gegebenes angewendeten Axioms ist

[35] Ursprünglich Mannigfaltigkeitslehre
[36] [4] Dieses Buch ist im Allgemeinen sehr lesenswert. Alle im Kapitel 7 enthaltenen und einer Quelle bedürftigen Inhalte sind in [4] zu finden.
[37] Das sog. Russelsche Paradoxon
[38] Nach dem Vorbild der Metaphysik von gr. metá "nach, über"
[39] Die Vorsilbe "Meta-" ist für beliebige Wissenschaften einsetzbar.

wieder gegeben) für die Axiome. Vollständig bedeutet, dass das System mächtig genug ist, alle "wahren"[40] Sätze, die man mit den Zeichen des Kalküls darstellen konnte, aus den Axiomen herleiten kann. Widerspruchsfrei bedeutet, dass man keinen Satz gleichzeitig mit seinem Gegenteil zeigen kann. Verbunden mit der Vollständigkeit bedeutet die Widerspruchsfreiheit, dass man alle "wahren", aber keine "falschen" Sätze aus den Axiomen ableiten kann. Der Glauben reicht in der Mathematik jedoch nicht, es musste ein Beweis her. Dabei kam David Hilbert ins Spiel. Er war derjenige, der der Welt im Jahr 1900 eine Liste von 23 mathematischen Problemen von grösster Wichtigkeit zum Lösen gab. Problem Nummer 2 auf seiner Liste war "Sind die arithmetischen Axiome widerspruchsfrei?". Später (1920 - 1922) rief er das Hilbertprogramm ins Leben. Ein Programm, das den einzigen Sinn und Zweck hatte, die Mathematik und Logik zu formalisieren und ihre Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit zu beweisen. Dies zeigt auf, wie wichtig dies für die Mathematiker war. Eine bedeutende Grundlage schufen dabei die Mathematiker Bertrand Russell und Alfred North Whitehead, indem sie 1910 - 1913 die "Principia Mathematica" herausgaben, ein dreibändiges Werk, das die Mathematik axiomatisierte und grosse Teile davon aus den Axiomen herleitete. Doch ob dieses wirklich vollständig und widerspruchsfrei ist, war nicht gezeigt.
Wie in der Mathematik üblich, muss man bei einem Beweis immer daran denken, dass es auch anders sein könnte und es oft fruchtbare Ergebnisse liefert, wenn man zu widerlegen versucht, was man beweisen will. Ein Beispiel dafür ist der Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt[41]. Nimmt man nämlich im Gegenteil an, dass es endlich viele gibt, dann kann man alle Primzahlen in eine Liste setzen, miteinander multiplizieren und 1 addieren. Diese neue Zahl ist sicher nicht durch eine Primzahl teilbar, da diese alle eine um 1 kleinere Zahl teilen. Also ist unsere neue Zahl selber eine Primzahl oder besitzt Primfaktoren, die nicht in unserer Liste enthalten sind. Also ist eine endliche Liste von Primzahlen niemals vollständig, also muss es unendlich viele Primzahlen geben. Man hat durch die Annahme, es sei anders, als man will, einen sehr eleganten Beweis dafür erhalten, dass es nicht so ist, wie man nicht will, da die andere Option in einen Widerspruch mündet. Wenn man bei einem solchen Widerspruchsbeweis aus Versehen das beweist, was man nicht will (im Beispiel wäre das, dass es wirklich nur endlich viele Primzahlen gibt), ist das auch gut, denn dann hat man wenigstens Klarheit über die Frage erlangt und verliert nicht mehr Zeit mit dem Versuch ihrer Beantwortung. Deshalb versuchten sich auch Mathematiker an Beweisen für die Unvollständigkeit und Widersprüchlichkeit der Mathematik. Tatsächlich gelang dem Österreicher Kurt Gödel 1931 ein solcher. Unter dem Titel "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme" veröffentlichte er zwei Unvollständigkeitssätze. Der erste besagt, dass die Arithmetik unvollständig ist, der zweite, dass ihre Widerspruchsfreiheit nicht mit den ihr zur Verfügung gestellten Mitteln bewiesen werden kann. Was das bedeutet, werden wir später noch genauer untersuchen. Diese Sätze bedeuteten das grundsätzliche Scheitern des Hilbertprogramms, obwohl die Logik bewiesenermassen vollständig und widerspruchsfrei ist. Um Gödels Satz besser verstehen zu können, werden wir erst eine einfachere Konstruktion eines Paradoxons in der Arithmetik betrachten, von dem sich Gödel zu seiner Arbeit inspirieren liess.

[40] Wir haben in den vorangehenden Kapiteln gesehen, dass Wahrheit von der Interpretation abhängt. Da wir in der Mathematik nicht von einer Interpretation ausgehen, ist ein Satz dann "wahr", wenn er nicht im Widerspruch zu den Axiomen steht.

[41] [13] Euklid hat sich nicht nur mit der Geometrie beschäftigt.

7.2 Richards Antinomie

Ein Mathematiker, der 1905 versuchte, einen Widerspruch in der Mathematik zu konstruieren, war Jules Richard. Die Antinomie, die er entdeckte, nennt man "die Richardsche Antinomie"[42].

Gemäss Richard gibt es in einer festgelegten (z.B. der deutschen) Sprache unendlich viele Sätze, welche arithmetische Eigenschaften von natürlichen Zahlen definieren. So z.B. "n ist kleiner als Zwei" oder "n ist restlos durch Zwei teilbar" oder "n ist die 72. Potenz einer anderen Zahl", wobei n jeweils eine natürliche Variable[43] ist. Da jeder dieser Sätze eine endliche Anzahl von Buchstaben hat, können wir alle diese Aussagen in eine Ordnung bringen. Erst ordnen wir die Aussagen der Länge nach, dann nach dem Alphabet.
Die erste Aussage ist von den kürzesten Aussagen die erste im Alphabet, die zweite ist von den kürzesten Aussagen die zweite im Alphabet usw.
Diese Auflistung nun weist jeder arithmetischen Eigenschaft eineindeutig[44] eine Zahl zu, nämlich die Platznummer der Eigenschaft.
Nun kommt der Trick an der Sache: Wir führen die Eigenschaft "n ist eine richardsche[45] Zahl" ein. Eine Zahl ist dann und nur dann richardsch, wenn sie die Eigenschaft, deren Nummer sie ist, *nicht* besitzt. Wenn also die vierte Eigenschaft "n ist eine Primzahl" ist, dann ist vier richardsch, da vier keine Primzahl ist. Oder wenn die sechzehnte Eigenschaft "n ist eine Quadratzahl" ist, dann ist sechzehn keine richardsche Zahl, da $16 = 4^2$.
Nun hat auch die Eigenschaft "n ist eine richardsche Zahl" eine Nummer x. Nehmen wir einmal an, x sei richardsch. Dann hat x nicht die Eigenschaft mit der Nummer x. Diese ist "n ist eine richardsche Zahl". Da x diese Eigenschaft nicht hat, ist sie also keine richardsche Zahl. Wenn x aber keine richardsche Zahl ist, dann hat sie die besagte Eigenschaft und ist somit wieder richardsch.
Die Zahl x ist also genau dann eine richardsche Zahl, wenn sie keine ist, offensichtlich ein Widerspruch. Damit sind die Eigenschaften der natürlichen Zahlen widersprüchlich und Hilberts Wunsch ist widerlegt.

Aber die Sache muss noch einen Haken haben, denn sonst hätte Gödel ja nichts mehr zu tun gehabt. Dieser Haken findet sich in der Unterscheidung zwischen Mathematik und Metamathematik. Und zwar besteht unsere Liste aus mathematischen Sätzen. Dass wir die Sätze jedoch in eine Reihenfolge bringen, ist ein metamathematischer Vorgang, also ist auch die Platznummer eines Satzes ein metamathematisches Objekt. Die Eigenschaft "n ist eine richardsche Zahl" betrachtet also n einerseits als mathematische Zahl, aber auch als metamathematische Platznummer. Aber eine Metamathematisch Platznummer hat in der Mathematik selber nichts zu suchen, da wir die Metamathematik klar von der Mathematik abgrenzen. Somit ist die Eigenschaft, eine richardsche Zahl zu sein, metamathematisch und gar nicht in unsere Liste, da unsere Liste nur mathematische Eigenschaften enthält. Somit ist auch Richards Argumentation nicht mehr möglich, da er die Grenzen der Mathematik verletzte und somit nicht die Widersprüchlichkeit der Mathematik als geschlossenes System zeigte, sondern nur, dass es Widersprüche gibt, wenn man Mathematik und Metamathematik vermischt.

Die Unterscheidung zwischen Mathematik und Metamathematik hat also die Arithmetik vorläufig gerettet. Gödel hat den Fehler Richards allerdings nicht gemacht. Von Richards Antinomie nehmen wir die Idee, metamathematische Ausdrücke in der Mathematik darzustellen, und die Vorsicht der möglicherweise damit verbundenen Fehler mit zum Beweis von Gödels Unvollständigkeitssätzen - und natürlich die Idee der Antinomie.

[42] oder "das Richardsche Paradoxon". Das Wort Paradoxon verwenden wir hier als Synonym für Antinomie.

[43] Eine Variable ist eine vorläufig nicht festgelegte Zahl. Die Sätze machen in dieser Form keine Aussage, wenn man nicht eine Zahl für n einsetzt. Tut man dies, erhalten die Sätze ein "Ziel", für die sie dann gelten oder nicht.

[44] Eineindeutig bedeutet, dass jeder Eigenschaft genau eine Zahl und jeder Zahl genau eine Eigenschaft zugeordnet wird. Keine mehr und keine weniger.

[45] nach Jules Richard

7.3 Gödels Unvollständigkeitssätze

Kurt Gödel veröffentlichte seine Arbeit 1931. Sie baut wie Richards Antinomie auf einer Nummerierung aller mathematischen Sätze auf. Dazu formalisierte er die Mathematik. Das heisst, dass er nicht wie vor wenigen Jahrhunderten alle mathematischen Überlegungen in der Sprache, sondern in mathematischen Zeichen schrieb. Aus der Schule wissen wir alle, dass es nicht allzu viele mathematischen Zeichen gibt. Gödel verwendete in seiner Arbeit nur 6 konstante Zeichen, die ihm erlaubten, den Teil der Mathematik abzubilden, den er brauchte. Wir werden zehn solche Zeichen verwenden, um die Sache etwas zu vereinfachen[46]. Gödels Geniestreich bestand darin, dass er jedem Zeichen eine Nummer gab, die man die Gödelzahl des Zeichens nennt. Kennt man die Nummer, so kennt man auch das Zeichen und umgekehrt. Die Zeichen, die wir brauchen werden, sind in der folgenden Liste aufgeführt.

Zeichen	Gödelzahl	Bedeutung
$\neg$	1	nicht...
$\vee$	2	...oder...
$\Rightarrow$	3	wenn..., dann...
$\exists$	4	es gibt mindestens ein...
$=$	5	...ist gleich...
0	6	Null
s	7	...ist die nachfolgende Zahl von...
(	8	Interpunktionszeichen...
)	9	...Interpunktionszeichen
,	10	...Interpunktionszeichen...

Es ist völlig belanglos, welches Zeichen jetzt welche Gödelzahl hat und wie viele Zeichen wir haben. Wichtig ist, dass die Gödelzahl eindeutig ist und man mit den Zeichen alles abbilden kann, was man braucht.

Die Zeichen, die verwendet werden, sind vermutlich nicht alle bekannt, deshalb werde ich die kritischen kurz erläutern. Die Zeichen mit den Gödelzahlen 3, 5, 6, 8, 9 und 10 sind sicherlich aus der Schule bzw. allgemein bekannt.

Die logische Verneinung $\neg$ wird verwendet, um zu sagen, dass etwas nicht so ist, wie es der nachfolgende Ausdruck sagt. Beispielsweise $\neg(2 = 3)$ sagt aus, dass die Formel $2 = 3$ "falsch" ist.

Der Operator $\vee$ entspricht dem "oder" der Sprache. Ein bekanntes Beispiel sind die Lösungen von quadratischen Gleichungen. Beispielsweise die Lösung von $x^2 = 9$ ist nicht $x = 3$, sondern $(x = 3) \vee (x = -3)$. Das Zeichen ist aber auch allgemeiner verwendbar für Aussagen wie $(2 = 1+2)\vee(2 = 1+1)$ oder $(2 > 1)\vee(1 < 2)$. Es können auch beide Glieder wahr sein, mindestens aber eines, damit der Gesamtausdruck wahr ist.

Der Existentialquantor $\exists$ sagt aus, dass das Nachfolgende existiert. Beispielsweise $\exists 2$ sagt aus, dass es die Zahl 2 gibt. Verwendet wird er meist in der Form $(\exists x)(x = 2)$, was bedeutet, dass x einen Wert annehmen kann, sodass die nachfolgende Formel $x = 2$ erfüllt ist. $\neg(\exists x)(\neg(x = x))$ bedeutet, dass es kein x gibt, sodass $x = x$ nicht erfüllt wäre. Also ist $x = x$ für alle x wahr.[47]

Das Zeichen s ist eine geniale Erfindung, die uns Zeichen für jede natürliche Zahl erspart. Setzt man s hinter einen Zahlausdruck, so bezeichnet das die nächste ganze Zahl[48]. Die Zeichenfolge $3s$ ist also nichts weiter als 4. Damit kann man die natürliche Zahl n darstellen als $0ss\dots s$ mit n mal dem Zeichen s nach der 0.[49]

Diese Zeichen reichen jedoch noch lange nicht aus. Wir brauchen auch Zeichen für Variablen. Wir unterscheiden zwischen drei Arten von Variablen. Wir brauchen erstens die Zahlvariablen (üblich: x, y, z, ...), die wir alle aus der Schule kennen. Sie repräsentieren irgendeine *Zahl*, wie in $x = 0ss$.

[46] Die Zeichen sowie alle Ideen dieses Kapitels sind [4] entnommen.

[47] Dieser letzte Ausdruck könnte mit dem Zeichen $(\forall x)(x = x)$ geschrieben werden, doch da man die Anzahl der Zeichen möglichst klein halten will, lassen wir es weg.

[48] Vom englischen "successor" für "Nachfolger"

[49] Das setzt Axiome für die natürlichen Zahlen in der Art deren von Giuseppe Peano voraus. Diese finden sich im Anhang.

Die zweiten sind Satzvariablen (p, q, r, ...), die verwendet werden, um *Formeln* zu repräsentieren. Das ist dann im Beispiel die ganze Gleichung $x = 0ss$, die Zeichenkette, die repräsentiert wird. Die dritte Art von Variablen sind die Prädikatsvariablen (P, Q, R, ...), die *Eigenschaften* beinhalten, wie zum Beispiel "ist gleich 2". Diese drei Variablenarten sehen jetzt eigentlich ganz ähnlich aus, doch die Unterschiede sind relevant. Zahlvariablen repräsentieren eine Zahl, Satzvariablen eine Zeichenkette und Prädikatsvariablen eine Eigenschaft. Eine Zahl ist ein Baustein der Arithmetik, eine Zeichenkette ist eine sinnleere Folge von Zeichen und eine Eigenschaft ist ein Sinn, den man aus Zeichenfolgen herauslesen kann.
Die Variablen brauchen natürlich auch eine Gödelzahl, bzw. unendlich viele davon, da man ja auch beliebig viele verschiedene Variablen verwenden kann. Die Zahlvariablen werden in aufsteigender Reihenfolge mit den Primzahlen ab 10 nummeriert. Das heisst, dass die erste Zahlvariable die Gödelzahl 11 hat, die zweite 13, die dritte 17 usw. (Wieso wir ausgerechnet die Primzahlen wählen, sehen wir später). Satzvariablen sind jeweils die Quadrate der Primzahlen ab 10. Also 11^2, 13^2 usw. Die Prädikatsvariablen erhalten dementsprechend die dritten Potenzen dieser Primzahlen.

Nun hat jedes Zeichen, das wir brauchen eine Gödelzahl, doch einzelne Zeichen reichen nicht aus, um mathematische Objekte zu repräsentieren. Wir brauchen Zeichen*ketten*, um Formeln wie $0 = 0$ darzustellen. Dazu verwenden wir die Eigenschaft, dass jede natürliche Zahl eine eindeutige Primfaktorzerlegung besitzt. Wir nehmen erste Zeichen der Formel, von der wir die Gödelzahl wissen wollen, und setzen es als Exponent auf die erste Primzahl. Das zweite Zeichen ist der Exponent der zweiten Primzahl etc. Dann haben wir am Ende die Primfaktorzerlegung der Gödelzahl, die wir suchen.
$0 = 0$ hat also die Gödelzahl:

Formel	0	$=$	0
Gödelzahlen	6	5	6
Gödelzahl der Formel	2^6	$\cdot 3^5$	$\cdot 5^6$

Die Gödelzahl von $0 = 0$ ist also $2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^6 = 243000000$.
Man kann die Gödelzahlen von einzelnen Zeichen von denen von Formeln klar unterscheiden. Eine Formel beinhaltet mindestens zwei Zeichen (z.b. "$\exists x$"), also hat ihre Gödelzahl mindestens zwei verschiedene Primfaktoren. Die einzigen Zeichen auf die das auch zutrifft, sind diejenigen mit den Gödelzahlen von 1 bis 10. Die einzige Formel, die eine Gödelzahl unter 10 hat, ist "$\neg\neg$" mit 6, welche nicht unseren Zeichenkombinationsregeln (die wir später sehen werden) entspricht[50]. Zeichen mit einer Gödelzahl über 10 haben eine Gödelzahl mit nur einem Primfaktor, sind also auch von Formeln unterscheidbar. Nun erkennen wir auch den Grund, wieso wir den Variablen Potenzen von Primzahlen über 10 zugeordnet haben.
Ein Beweis besteht allerdings nicht nur aus einer Formel, sondern ist eine Reihe von solchen. Um auch einen Beweis darstellen zu können, wiederholt man den Prozess, indem man die Gödelzahlen der Formeln als Exponenten der Primzahlenreihe einsetzt. Die Gödelzahl dieses unglaublich kurzen Beweises für die Formel $0 = 0$ berechnet man also so:

$$x = x \tag{1}$$
$$0 = 0 \tag{2}$$

Die Zeichen von $x = x$ haben die Gödelzahlen 11, 5 und 11 (x ist eine Zahlvariable), also hat die Formel $x = x$ die Gödelzahl $2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^{11} = 24'300'000'000'000$. Von der Formel $0 = 0$ wissen wir schon, dass sie die Gödelzahl $243'000'000$ hat. Der Beweis hat dann die Gödelzahl:

$$2^{\text{Gödelzahl der ersten Formel}} * 3^{\text{Gödelzahl der zweiten Formel}}$$
$$= 2^{24300000000000} * 3^{243000000}$$

Diese Zahl hat etwas mehr als 7 Billionen Ziffern (!), weshalb ich sie nicht ausschreibe. Auch wenn sie unglaublich gross ist, kann man von ihr auf den Beweis schliessen, indem man sie in

[50] Da das Zeichen "$\neg$" eine nachfolgende Formel verlangt.

ihre Primfaktoren zerlegt. Die Exponenten kann man dann eindeutig als Gödelzahlen von Formeln erkennen, also von Gödelzahlen von Zeichen unterscheiden, und auch diese in ihre Primfaktoren zerlegen. Die Exponenten dieser Primfaktoren muss man dann nur noch der Reihe nach in Zeichen übersetzen.

Nun haben wir wirklich für jeden mathematischen Gegenstand eine Zahl. Ganz wichtig ist dabei, dass die Zuordnung einer Gödelzahl zu einer Formel metamathematisch ist, auch wenn die Zahl selber ein mathematisches Objekt ist. Zeichen sind jedoch nur ein Bestandteil eines Kalküls. Wir brauchen noch Kombinationsregeln der Zeichen, Schlussregeln und natürlich Axiome. Die Kombinationsregeln sind schon in der Tabelle durch Punkte angedeutet: Nach "$\neg$" muss eine Formel, vor und nach "$\vee$" und "$\Rightarrow$" muss eine Formel, nach "$\exists$" eine Variable, vor und nach "$=$" ein Zahlausdruck, vor "s" ein Zahlausdruck, zwischen den Zeichen "(" und ")", die immer paarweise auftreten, ein beliebiger Ausdruck und vor und nach "," ein beliebiger Ausdruck stehen. Schlussregeln sind mindestens die Substitutionsregel[51] und die Abtrennungsregel[52]. Die Axiome werden allgemein gehalten. Das bedeutet, dass der Beweis für jegliches Axiomensystem gilt, sofern es eine bestimmte Mächtigkeit erreicht. Es braucht mindestens eine Theorie der natürlichen Zahlen, eine Addition, eine Multiplikation für die Zuweisung einer Gödelzahl und für den Beweis an sich eine Mengenlehre. Damit sind wir nun gewappnet für den Beweis.

Erst sehen wir uns eine kleine Übersicht der Dinge an, die Gödel der Reihe nach gezeigt hat und gehen auf Details erst später ein.
Der erste Schritt ist ein Satz, der aussagt, er sei selber nicht beweisbar. Dies ist eine Antinomie wie die von Richard. Denn wenn wir annehmen, der Satz sei beweisbar, dann trifft seine Aussage zu und wir haben gleichzeitig mit dem Beweis, dass er wahr ist, sein Gegenteil bewiesen. Wenn wir aber gleichzeitig einen Satz und sein Gegenteil beweisen können, dann ist das System widersprüchlich. Das wollen wir nicht, also nehmen wir an, der Satz sei nicht beweisbar. Dann ist er wahr, da er genau dies aussagt. Dann ist das System aber unvollständig, da es einen wahren Satz im System gibt, der nicht bewiesen werden kann. Deshalb ist ein arithmetisches System entweder unvollständig oder widersprüchlich.
Im zweiten Schritt zeigte Gödel metamathematisch, dass der konstruierte Satz wahr ist. Denn im System gibt es nur die Optionen "beweisbar" und "nicht beweisbar", in der Methamatematik allerdings gibt es auch die Option "unentscheidbar". Dieser Satz sagt aus, er sei nicht beweisbar und ist somit ein wahrer Satz, da er unentscheidbar ist. Also ist nach der Argumentation des ersten Schrittes das arithmetische System zwingend unvollständig, aber nicht zwingend widersprüchlich. Wenn das System aber unvollständig ist, dann heisst das, dass die Axiome nicht ausreichen, um alles zu zeigen, was wahr ist. Also brauchen wir das System nur um ein Axiom zu erweitern, mit dem man den konstruierten Satz beweisen kann. Dann können wir aber von neuem beginnen und wieder einen Satz konstruieren, der das System unvollständig macht. Also ist das System unvollständig, egal wie weit wir es auch erweitern. Dies ist sein erster Unvollständigkeitssatz.
Als letztes konstruierte Gödel einen Satz, der aussagt, dass die Arithmetik widerspruchsfrei ist und zeigte, dass aus diesem Satz unser erster konstruierter Satz folgt, der aber ja nicht beweisbar ist. Könnte man also die Widerspruchsfreiheit zeigen, dann würde man die Formel beweisen, von der wir gezeigt haben, dass es für sie keinen Beweis gibt. Also kann man die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik nicht mit ihren eigenen Mitteln zeigen. Dies ist sein zweiter Unvollständigkeitssatz.

Nun nehmen wir den ersten Schritt genauer unter die Lupe.
Als erstes müssen wir einen Satz der Arithmetik ermöglichen, der nur schon irgend etwas über die Arithmetik aussagt, also eine metamathematische Aussage beinhaltet. An diesem Problem ist Richards Antinomie gescheitert. Mit den Gödelzahlen stehen uns allerdings einige Hintertüren offen. Beispielsweise können wir in der Metamathematik sagen, dass "(" das erste Zeichen in der Formel

[51] Man kann eine Variable überall, wo sie auftritt, durch einen der Variablenart entsprechenden Ausdruck ersetzen.
[52] Wenn man die Ausdrücke p und $p \Rightarrow q$ hat, dann gilt auch q.

"$(\exists x)(x = 0s)$" ist.[53] In der Mathematik nun können wir für diese Aussage auf die Gödelzahlen zurückgreifen. Und zwar hat das Zeichen "(" die Gödelzahl 8. Erinnern wir uns an die Konstruktion der Gödelzahl einer Formel. Es wird die Gödelzahl des ersten Zeichens der Formel als Exponent auf die 2 gesetzt, die Gödelzahl des zweiten Zeichens als Exponent auf die 3, usw. und diese Zahlen werden dann miteinander multipliziert. Das bedeutet, dass die Primfaktorzerlegung der Formel mit 2^8 beginnen muss, da das erste Zeichen die Gödelzahl 8 hat. Also muss die Gödelzahl der Formel "$(\exists x)(x = 0s)$" durch 2^8, darf aber nicht durch 2^9 teilbar sein.[54] Das ist eine rein arithmetische Beziehung und ist insbesondere nicht Gegenstand der Metamathematik. So können wir also Aussagen *über* die Arithmetik *in* der Arithmetik machen, ohne die Grenze zwischen Mathematik und Metamathematik zu verletzen. Die gefundene arithmetische Beziehung sagt allerdings primär nichts über die Stellung eines Zeichens aus, sondern eben nur, dass eine Zahl durch eine andere teilbar ist. Diese Beziehung muss erst metamathematisch interpretiert werden, um zum gewünschten metamathematischen Satz zu gelangen. Die Zahl wird also für die Beziehung rein mathematisch behandelt. Richards Antinomie scheiterte daran, dass die Nummer eines Satzes im Beweis metamathematisch behandelt wurde. In Gödels Arbeit wird sie jedoch nach der Zuweisung abgekoppelt von der Metamathematik.

Das Ziel des ersten Schrittes ist eine arithmetische Beziehung, die nach einer metamathematischen Interpretation aussagt, es gäbe keinen Beweis für sie. Dazu suchen wir zuerst die Beziehung, dass eine Formelkette ein Beweis für eine Formel ist. Ein Beweis für eine Formel ist eine Kette von Formeln, an deren Ende die zu beweisende Formel steht. Die zu beweisende Formel q ist also die letzte Formel einer Formelkette p. Dann lautet diese Beziehung mathematisch in Worten so: "In der Primfaktorzerlegung der Gödelzahl der Formelkette p ist der Exponent der höchsten Primzahl, deren Exponent nicht 0 ist, die Gödelzahl der Formel q." Diese Beziehung ist (in den Zeichen unseres Kalküls ausgedrückt) ungeheuer kompliziert und sprengt den Rahmen dieses Textes. Es gibt diese Beziehung und damit wollen wir uns zufrieden geben. Um sie trotzdem bezeichnen zu können, geben wir ihr einen Namen: $Bew(x, y)$ ist gleichbedeutend damit, dass die Formelfolge mit der Gödelzahl x ein Beweis für die Formel mit der Gödelzahl y ist.[55] Ganz wichtig dabei ist, dass $Bew(x, y)$ eine rein arithmetische Beziehung ist, die einerseits ohne Interpretation nicht die geringste Aussage über irgend einen Beweis macht, sondern nur ein Verhältnis zweier Zahlen bestimmt, andererseits dann und nur dann wahr ist, wenn die metamathematische Beziehung, die $Bew(x, y)$ repräsentiert, wahr ist. $Bew(x, y)$ ist also nicht ein metamathematischer Satz, sondern nur eine sinngemässe Übertragung eines solchen auf die Arithmetik. Dabei wurde der Satz vollständig aus der Metamathematik entfernt. Erst nach einer Interpretation bezeichnet er einen Beweis.

Nun wollen wir aber einen Satz, der die Unmöglichkeit eines Beweises bezeichnet. Dieser ist einfach konstruiert, indem wir behaupten, es gäbe keine Zahl x, sodass $Bew(x, y)$ erfüllt ist, also $\neg(\exists x)(Bew(x, y))$. Es existiert also keine Zahl x, sodass x die Gödelzahl eines Beweises für die Formel mit der Gödelzahl y ist. Da jede Formelkette eine Gödelzahl hat, gibt es also keinen solchen Beweis.

Als letztes müssen wir diese Formel nur noch auf sich selber beziehen, damit aus der Aussage "Es gibt keinen Beweis für die Formel mit der Gödelzahl y." die Aussage "Es gibt keinen Beweis für die Formel mit der Gödelzahl der Formel, die diesen Satz repräsentiert." Dazu müssen wir also für die Variable y die Gödelzahl von "$\neg(\exists x)(Bew(x, y))$" einsetzen. Dabei müssen wir aber aufpassen! Denn "y" hat die Gödelzahl 13. Wenn wir das Zeichen "y" durch die Zeichen "$0ss\ldots s$" ersetzen, dann ändert sich die Gödelzahl der Formel, da die Gödelzahl von "$0ss\ldots s$" nicht 13 ist. Diese Änderung hat aber zur Folge, dass die Gödelzahl unserer Formel eine andere ist, als die der Formel, deren Beweis sie für unmöglich erklärt.

Um dieses Problem zu beseitigen müssen wir uns eines Trickes bedienen. Und zwar stellen wir die Funktion $sub(x, y, z)$ auf. Sie bezeichnet "die Gödelzahl der Formel, die man erhält, wenn man in

[53] Ich schreibe die Zeichen und Formeln absichtlich in Anführungszeichen, da "(" in der Metamathematik nur als Name existiert. Das Zeichen (ist mathematisch und darf somit selber nicht in der Metamathematik verwendet werden.

[54] Sonst wäre das erste Zeichen ")", "," oder eine Variable.

[55] Die Variablen x und y sind Zahlen, während p und q Zeichenketten sind.

der Formel mit der Gödelzahl x die Variable mit der Gödelzahl y durch die Zahl z ersetzt". In einem Beispiel wird schnell klar, was damit gemeint ist.
Betrachten wir den obigen Beweis. Wir haben in der Gleichung $x = x$ die Variable x durch die Zahl 0 ersetzt. Das Resultat war die Gleichung $0 = 0$. Wir können nun $sub(u, v, w)$[56] verwenden, um die Gödelzahl des Resultats zu finden. u ist dabei die Gödelzahl der Ausgangsformel "$x = x$", also 24'300'000'000'000. v ist die Gödelzahl der Variablen, die wir ersetzen wollen. Da wir x ersetzen und x die Gödelzahl 11 hat, ist $v = 11$. Das, was wir an der Stelle von x einsetzen, ist w, also 0. Also ist $sub(24'300'000'000'000, 11, 0)$ die Gödelzahl der Formel, die man erhält, wenn man in die Formel $x = x$ (mit der Gödelzahl 24.3 Billionen) für x (mit der Gödelzahl 11) die Zahl 0 einsetzt. Also die Gödelzahl der Formel "$0 = 0$", die wir ja schon kennen: 243'000'000.
Nun wollen wir aber für eine Variable in einer Formel mit der Gödelzahl y die Gödelzahl y selber einsetzen[57]. Im Beispiel wäre dies dann $sub(24'300'000'000'000, 11, 24'300'000'000'000)$ und somit Gödelzahl der Formel "$24'300'000'000'000 = 24'300'000'000'000$". Allgemein ist diese Zahl $sub(y, z, y)$, wobei z die Gödelzahl der zu ersetzenden Variablen und y die der Formel ist.
Wenn wir nun also $sub(y, z, y)$ in die Formel $\neg(\exists x)(Bew(x, y))$ für die Variable y einsetzen, dann erhalten wir die Formel $\neg(\exists x)(Bew(x, sub(y, z, y)))$. Diese müssen wir nur noch so hinbiegen, dass $sub(y, z, y)$ die Gödelzahl dieser Formel ist. Wir müssen die Variable y durch die Gödelzahl der Formel ersetzen. Das Zeichen "y" hat die Gödelzahl 13 und z ist die Gödelzahl der Variablen, die ersetzt wird. Also ist $z = 13$. Somit haben wir die Formel $\neg(\exists x)(Bew(x, sub(y, 13, y)))$, die im metamathematischen Äquivalent aussagt, dass die Formel, die man aus der Formel mit der Gödelzahl y erhält, indem man die Variable mit der Gödelzahl 13 durch y ersetzt, nicht bewiesen werden kann. Diese Formel hat eine Gödelzahl, die wir n nennen. Wenn wir n für y einsetzen, dann heisst die neue Formel:

$$\neg(\exists x)(Bew(x, sub(n, 13, n)))$$

Wobei n keine Variable, sondern die Gödelzahl der vorherigen Formel ist.
Diese neue Formel entspricht dem metamathematischen Satz, dass es keinen Beweis für die Formel mit der Gödelzahl $sub(n, 13, n)$ gibt. Die Zahl $sub(n, 13, n)$ ist "die Gödelzahl der Formel, die man durch Ersetzen der Variablen mit der Gödelzahl 13 in der Formel mit der Gödelzahl n durch die Zahl n erhält". Die Formel $\neg(\exists x)(Bew(x, sub(n, 13, n)))$ ist aber diejenige, die man durch Ersetzen der Variablen y mit der Gödelzahl 13 in der Formel mit der Gödelzahl n durch die Zahl n erhalten hat.
Also ist $\neg(\exists x)(Bew(x, sub(n, 13, n)))$ gleichbedeutend mit dem metamathematischen Satz "Für diesen Satz gibt es keinen Beweis.". Der Satz ist nach Konstruktion genau dann wahr, wenn "seine" mathematische Formel wahr ist. Mit diesem Satz haben wir die Antinomie erreicht, die unser Ziel ist. Denn gibt es einen Beweis für die Formel $\neg(\exists x)(Bew(x, sub(n, 13, n)))$, dann ist sie in der Arithmetik wahr, aber dann ist auch der metamathematische Satz "Für diesen Satz gibt es keinen Beweis." wahr. Da wir von einer Vollständigkeit ausgehen, muss für einen nicht beweisbaren Satz sein Gegenteil beweisbar sein, also $(\exists x)(Bew(x, sub(n, 13, n)))$[58]. Umgekehrt können wir zeigen, dass $\neg(\exists x)(Bew(x, sub(n, 13, n)))$ aus $(\exists x)(Bew(x, sub(n, 13, n)))$ folgt[59]. Also ist unser Satz dann und nur dann wahr, wenn sein Gegenteil wahr ist, deshalb ist er unentscheidbar. Das bedeutet, dass die Arithmetik entweder widersprüchlich oder unvollständig ist.

Der zweite Schritt ist verglichen mit dem ersten sehr einfach. Der mathematische Satz ist gleichbedeutend mit dem metamathematischen Satz, nicht beweisbar zu sein. Er ist aber, wie wir gezeigt haben unentscheidbar. Da ein unentscheidbarer Satz nicht beweisbar ist, ist dies also wahr. Aber

[56] Die Variablen wurden auf u, v und w gewechselt, um Verwechslungen der Variablen x zu vermeiden.

[57] Dass die Gödelzahl der Formel ausgerechnet y ist, hat keinerlei Bedeutung. Es erspart uns lediglich später einen Variablenwechsel.

[58] Diesen Satz müssten wir eigentlich erst konstruieren. Dies ersparen wir uns allerdings, da wir dabei nichts Neues lernen würden.

[59] Das müssten wir erst arithmetisch zeigen. Doch auch diesen Schritt ersparen wir uns, da er etwas komplizierter ist. Gödel selbst gelang nur der Beweis für die erste Folgerung. Die zweite fand er in einer schwächeren (induktiven) Form, die nicht eine vollständige Widersprüchlichkeit zeigt. J. Barkley Rosser verstärkte diese 1936 zur Vollständigkeit. Wir wollen jedoch nicht weiter darauf eingehen und begnügen uns damit, dieses Detailproblem zu überspringen mit dem Wissen, dass es gelöst ist.

in einem vollständigen System ist jeder wahre Satz beweisbar. Also kann die Mathematik sicher nicht vollständig sein. Dies ist auch die Aussage des ersten Unvollständigkeitssatzes. Ob sie auch widersprüchlich ist, muss man nun separat zeigen.

Dazu betrachten wir drei Schritt und somit den zweiten Unvollständigkeitssatz. Wir haben das Wort "widersprüchlich" nun häufig verwendet, doch die Bedeutung dieses Wortes ist noch nicht umfassend geklärt. Die Arithmetik ist dann widersprüchlich, wenn ein Satz p wahr ist und gleichzeitig der Satz $\neg p$. Doch was hat das für Auswirkungen auf das System? In der Arithmetik gilt ein Gesetz mit Namen "ex falso quodlibet"[60], das besagt, dass aus zwei sich widersprechenden Aussagen Beliebiges folgt. Beliebiges kann alles sein, also das "wahre" <u>und</u> das "falsche". Ist also p und $\neg p$ beweisbar, so folgt daraus, dass alles beweisbar ist. Dann kann die Arithmetik aber nicht zwischen "Wahrem" und "Falschem" unterscheiden, da für sie alles "wahr" ist und dann ist sie nutzlos.
Wir wollen nun den metamathematischen Satz "Wenn die Arithmetik widerspruchsfrei ist, dann ist sie unvollständig." in die Arithmetik selber übertragen. Wegen "ex falso quodlibet" ist in einem widersprüchlichen System jeder Satz beweisbar. Also gibt es in einem widerspruchsfreien System mindestens einen Satz, den man nicht beweisen kann. Deshalb ist $(\exists y)((\neg\exists x)(Bew(x,y)))$, also "Es gibt mindestens eine Formel mit der Gödelzahl y, sodass es keinen Beweis für sie gibt.", gleichbedeutend damit, dass die Arithmetik widerspruchsfrei ist. Also haben wir schon die erste Formel. Dann brauchen wir eine Formel, die zur Folge hat, dass die Arithmetik unvollständig ist. Diesen Satz haben wir schon konstruiert, es ist nämlich das Kernstück des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes: $\neg(\exists x)(Bew(x, sub(n,13,n)))$. Wir haben schon im ersten und zweiten Schritt gezeigt, dass dieser Satz gleichbedeutend ist mit der Aussage "Die Arithmetik ist unvollständig.". Nun müssen wir die beiden Formeln nur noch zusammenhängen:

$$(\exists y)((\neg\exists x)(Bew(x,y))) \Rightarrow \neg(\exists x)(Bew(x, sub(n,13,n)))$$

Dieser Satz sagt also aus, dass die Arithmetik unvollständig ist, wenn sie widerspuchsfrei ist. Diese Formel kann man formal beweisen. Wir suchen diesen Beweis nicht, sondern geben uns damit zufrieden, dass Gödel ihn gefunden hat. Betrachten wir die Folgen dieses Satzes. Wenn wir die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik tatsächlich mit einer Methode beweisen können, die in der Arithmetik selber abgebildet werden kann, dann folgt daraus in der Arithmetik, dass wir auch einen Beweis für $\neg(\exists x)(Bew(x, sub(n,13,n)))$ haben. Da dieser Satz aber unentscheidbar ist, kann es auch keinen Beweis für ihn geben und deshalb können wir auch nicht mittels der Arithmetik beweisen, dass sie widerspruchsfrei ist.
Das bedeutet allerdings noch lange nicht, dass es überhaupt keinen Beweis gibt. Denn wir können ja auch Beweise über Dinge in der Arithmetik aufstellen, die man nicht in der Arithmetik abbilden kann. Dann folgt auch kein arithmetischer Satz, der die Widerspruchsfreiheit beteuert. Solche Beweise wurden später korrekt erstellt.
Doch Hilberts Programm scheiterte im Punkt der Vollständigkeit. Das erschütterte die Mathematik der damaligen Zeit. Denn es war damit nicht nur gezeigt, dass die Suche nach einem "allmächtigen" System erfolglos bleiben würde, sondern dass prinzipiell ein solches System nicht existiert, sofern man den Gödelschen Beweis durchführen kann.[61] So stehen heute noch sehr alte Probleme offen, von denen man nicht sicher ist, ob sie eine Lösung haben. Ein Beispiel dafür ist das Theorem, dass jede gerade Zahl grösser als 2 die Summe zweier Primzahlen ist. Das bedeutet allerdings nicht, dass die Mathematiker nun keine Arbeit mehr hätten. Es hat sich lediglich ihr Aufgabenbereich etwas verändert. Vor dem Beweis Gödels strebten sie nach einem perfekten System, mit dem man jedes mathematische Problem lösen kann. Wenn dieses gefunden wäre, hätten sie noch die Aufgabe, alle Probleme zu lösen. Da es unendlich viele Probleme beliebiger Schwierigkeit gibt, hätten sie genug zu tun gehabt. Jetzt, da bekannt ist, dass es kein perfektes mathematisches System gibt, haben sie die Aufgabe, das System zu verbessern, bis man gewisse Probleme lösen

[60] oder genauer: "ex contradictione sequitur quodlibet"

[61] Es gibt arithmetische Systeme, die so schwach sind, dass der Gödelsche Unvollstängigkeitssatz nicht gilt und für die dann auch ein Vollständigkeits- und Widerspruchsfreiheitsbeweis geliefert wurden. Diese sind aber leider wirklich sehr schwach und deshalb nicht unbedingt erleuchtend.

kann. Wenn diese Probleme gelöst sind, treten neue Probleme auf, da es ja beliebig viele davon gibt. Um diese zu lösen, muss das System wieder erweitert, verbessert werden. Ein System, das man nicht perfektionieren kann, kann man immerhin verbessern.

8 Nachwort

Bevor sie weiterlesen,

lesen sie das Vorwort!

Wenn sie das Vorwort nicht gelesen haben, verstehen sie den obigen Satz leider nicht. Deshalb empfiehlt es sich, der Aufforderung nachzukommen.

Vor allem Gödels Unvollständigkeitssätze sind von höchster Bedeutung für die Mathematik, weshalb es auch die eng damit verknüpften Axiome sind. Diese sind eigentlich nur strukturell von Interesse und werden im Alltag, das heisst in den täglichen Anwendungen der Mathematik wohl nicht sehr nützlich sein. Das prinzipielle Wissen um die Unvollständigkeit der Mathematik ist allerdings sehr wertvoll, da sie eine unendlich lang währende Verbesserungsarbeit der Mathematik zur Folge hat. Ausserdem wird die Mathematik normalerweise als Monopol für die Wahrheit angesehen, da alle anderen Naturwissenschaften nur an die Natur angenähert sind. Doch dieses Monopol basiert auf willkürlichen Annahmen, den Axiomen, die von der Realität mehr oder weniger unabhängig sind. Also ist die Mathematik den Naturwissenschaften wie Physik oder Chemie einerseits näher, andererseits ferner denn je. Näher ist sie, da sie das Ziel, alle ihre (mathematischen) Problem lösen zu können, verloren hat. Auch den Naturwissenschaften ist klar, dass sie niemals alle ihre (realen) Probleme lösen und sich nur einer Vollständigkeit annähern können. Ferner ist sie, da sie ihren Realitätsbezug verlor. Natürlich wird sie in ihrer naturwissenschaftlichen Form weiterhin verwendet, um reale Probleme zu lösen. Die reine Mathematik kann sich aber eigentlich gar nicht mit der Realität befassen, da sie nie genau weiss, wann etwas in der Realität gilt und wann nicht. Man beobachtet vielleicht, dass etwas häufig so ist und nicht anders, aber sicher kann man sich nie sein. Deshalb ist es auch absolut sinnlos, in den Naturwissenschaften von Beweisen zu sprechen, da "Beweis" ein Wort der Mathematik ist und in der Realität kein Test den Anforderungen dieses Wortes auch nur im Prinzip nahe kommt[62]. Ich denke, zumindest aus diesem Wissen kann man in der Mathematik durch eine etwas nüchternere und distanziertere Betrachtung profitieren.

[62] Häufig wird "Beweis" in überzeugungsorientierten Angelegenheiten verwendet. So etwa "beweisen" Anwälte immer die Unschuld ihrer Klienten oder der Zusammenhang von CO_2 und Klimaerwärmung wird "bewiesen". Der korrekte Ausdruck wäre "Nachweis".

9 Anhang

9.1 Anhang A

Die Axiome von Giuseppe Peano für die natürlichen Zahlen sind folgenden:

1. 1 ist eine natürlich Zahl.
2. Zu jeder natürlich Zahl n gibt es eine natürliche Zahl ns, welche der direkte Nachfolger von n.
3. Es gibt keine natürliche Zahl, deren direkter Nachfolger 1 ist.
4. Jede natürliche Zahl ist der Nachfolger von maximal einer natürlichen Zahl.
5. Von allen Mengen, die die Zahl 1 und für jede natürliche Zahl auch deren direkten Nachfolger enthalten, ist die Menge der natürlichen Zahlen die kleinste.

Diese Axiome sind in [5] enthalten, wobei dort jedoch auch 0 als natürliche Zahl gilt. Die Menge der natürlichen Zahlen ist induktiv definiert, indem die tiefste Zahl (in unserem Fall 1) und jedes Folgeglied einer natürlichen Zahl als natürliche Zahl deklariert wird. Dabei ist jedoch das Folgeglied einer Zahl nicht definiert. Man kann die natürlichen Zahlen beispielsweise als Anzahl interpretieren, dann ist das Folgeglied einer Anzahl die Anzahl, die man erhält, wenn man ein Objekt mehr zu der gezählten Menge hinzufügt. Doch die Interpretation hat, wie wir schon gesehen haben, keinen Einfluss auf die Axiome. Trotzdem ist sie für die Vorstellung hilfreich, auch wenn man dabei immer bedenken muss, dass man einen Spezialfall betrachtet.

9.2 Anhang B

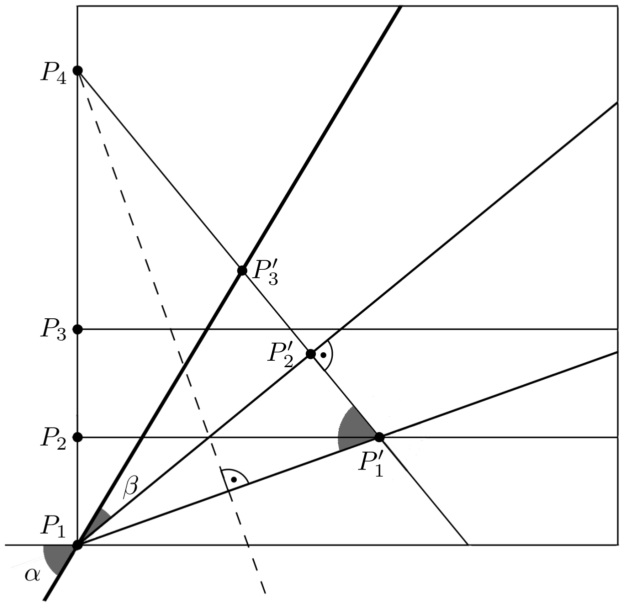

Abbildung 12: Winkeldrittelung

Der Winkel zwischen der unteren Kante des Blattes und $\overline{P_1P_3'}$ sei der zu drittelnde Winkel α. Der Winkel $\beta = \angle P_2'P_1P_3'$ ist der Winkel, von dem wir beweisen wollen, dass er gleich $\frac{\alpha}{3}$ ist.
Wegen $\overline{P_3P_2} = \overline{P_2P_1}$ gilt $\overline{P_3'P_2'} = \overline{P_2'P_1'}$ und zusätzlich wegen $\angle P_1P_2'P_1' = 90°$ ist $\triangle P_3'P_1P_1'$ gleichschenklig, also $\angle P_3'P_1P_2' = \angle P_2'P_1P_1' = \beta$. Weiter gilt

$$\angle P_2'P_1'P_1 = 90° - \beta \quad .$$

Ausserdem gilt wegen $\angle P_4P_1P_3' = 90° - \alpha$, $\angle P_3'P_1P_2' = \beta$ und $\angle P_1P_2'P_4 = 90°$, also $\angle P_1P_4P_2' = \alpha - \beta$ und $\overline{P_4P_1} = \overline{P_4P_1'}$ auch

$$\angle P_2'P_1P_1' = 90° - \frac{\alpha - \beta}{2} \quad .$$

Die beiden Gleichungen ergeben

$$90° - \beta = 90° - \frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\Leftrightarrow \alpha = 3\beta \quad .$$

qed

9.3 Anhang C

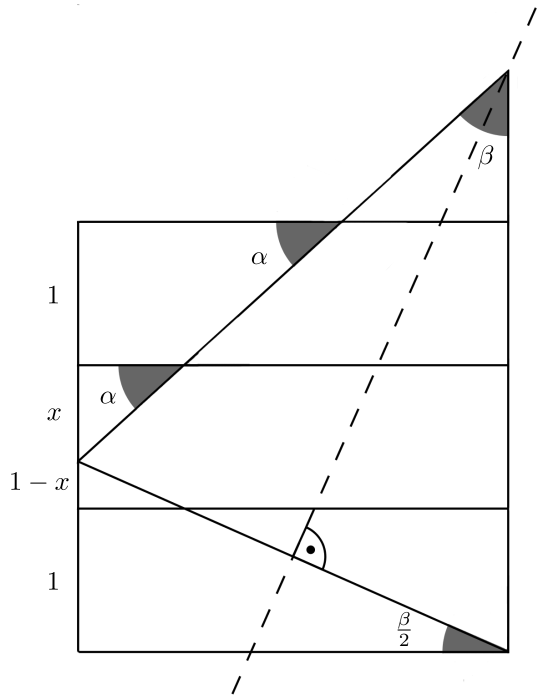

Abbildung 13: Konstruktion von $\sqrt[3]{2}$

Wir nehmen an, das Quadrat habe die Seitenlänge 3. Die zu beweisende Behauptung lautet:

$$\frac{1+x}{2-x} = \sqrt[3]{2} \quad .$$

Sie ist Äquivalent zu den Beziehungen

$$1+x = \frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1}, \quad 1-x = \frac{2-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1} \quad \text{und} \quad 2-x = \frac{3}{\sqrt[3]{2}+1} \quad .$$

Nach der obigen Abbildung gilt:

$$x = \sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \cos\beta$$

und

$$\frac{2-x}{3} = \tan\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos\beta}{\sin\beta} \quad .$$

Daraus ergibt sich die folgende Gleichung für x:

$$\frac{2-x}{3} = \tan\frac{\beta}{2} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \quad .$$

Diese ist (für $2 > x$) gleichwertig mit:

$$(2-x)^2(1+x) = 9(1-x) \quad .$$

Einsetzen der obigen Beziehungen zeigt, dass das behauptete x die Gleichung erfüllt, denn

$$\left(\frac{3}{\sqrt[3]{2}+1}\right)^2\left(\frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1}\right)\stackrel{?}{=}9\left(\frac{2-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1}\right) \quad\Leftrightarrow\quad 3\sqrt[3]{2}=(3-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{2}+1)$$

was einfach nachzurechnen ist.

qed

10 Quellenangaben

[1]	http://de.wikipedia.org/wiki/Hilbertprogramm
[2]	http://de.wikipedia.org/wiki/Antinomie
[3]	http://de.wikipedia.org/wiki/Hilberts_Liste_von_23_mathematischen_Problemen
[4]	Der Gödelsche Beweis - Ernest Nagel, James R. Newman, Verlag Oldenbourg
[5]	Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz - Facharbeit von Alexandra Surdina http://www.tiefgedacht.de/2007/02/25/goedels-unvollstaendigkeitssatz-in-kuerze
[6]	Origami and Geometric Constructions - Thomas Hull
[7]	A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers - New York Journal of Mathematics 6. 5. 2000 (Roger C. Alperin)
[8]	Gödel Escher Bach - Douglas R. Hofstadter, Ernst Klett Verlag
[9]	http://de.wikipedia.org/wiki/Winkelhalbierende
[10]	http://de.wikipedia.org/wiki/Evidenz
[11]	http://de.wikipedia.org/wiki/Dreiteilung_des_Winkels
[12]	http://de.wikipedia.org/wiki/Euklidische_Geometrie
[13]	http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Euklid
[14]	http://de.wikipedia.org/wiki/Klassische_Probleme_der_antiken_Mathematik
[15]	http://www.physics.ntua.gr/ ~mourmouras/euclid/index.html
[16]	http://de.wikipedia.org/wiki/Kalkül