

## Sélection d'exercices OSM avec solutions

**Important:** La théorie nécessaire pour résoudre les exercices suivants fait partie de la matière enseignée lors de nos rencontres. Il n'est donc *pas* nécessaire que tu sois capable de les résoudre pour pouvoir t'inscrire à l'OSM.

1. Dans une pièce il y a six personnes. Deux personnes sont toujours amis ou ennemis. Montrer que l'on peut toujours en choisir trois parmi ces personnes tels qu'ils sont tous amis ou tous ennemis entre eux.

### Exemple de solution.

Nous cherchons tout d'abord une forme plus graphique pour considérer le problème. Une telle visualisation peut souvent être le premier pas d'une solution.

Nous représentons les six personnes par six points. Si deux personnes sont amis nous relierons les deux points correspondants par une arête verte, sinon par une arête rouge. De cette manière on obtient un hexagone dans lequel chaque côté et chaque diagonale est vert ou rouge. Le but de l'exercice est de montrer que nous pouvons toujours choisir trois points tels que les arêtes qui les relient soient toutes vertes ou toutes rouges. Autrement dit, il faut montrer qu'il y a toujours un triangle vert ou un triangle rouge.

Pour montrer ceci nous choisissons un point arbitraire que nous appellerons  $P$ . Chaque arête partant de  $P$  est colorée en une de deux couleurs. Donc d'après le *principe des tiroirs* au moins trois de ces arêtes doivent avoir la même couleur. Nous appelons leurs autres extrémités  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Quitte à échanger les couleurs nous pouvons supposer que ces arêtes sont vertes.

Il y a maintenant deux cas possibles: Si une des arêtes  $AB$ ,  $BC$  ou  $CA$  est verte alors ses deux extrémités et  $P$  forment un triangle vert et nous avons fini. Mais si les arêtes  $AB$ ,  $BC$  et  $CA$  sont toutes rouges alors  $ABC$  est un triangle rouge et nous avons également fini.

**Remarques.** Le *principe des tiroirs* dit ceci:

Si l'on met  $k \cdot n + 1$  chaussettes dans  $n$  tiroirs, alors il y a au moins un tiroir qui contient plus que  $k$  chaussettes.

C'est un fait trivial qui est souvent utile. Dans la solution ci-dessus les chaussettes sont les cinq arêtes d'extrémité  $P$  et les tiroirs les deux couleurs rouge et vert (donc  $n = k = 2$ ). Beaucoup de problèmes combinatoires peuvent être résolus avec cette idée simple, le point crucial étant l'identification des chaussettes et des tiroirs. Une conséquence simple est par exemple que dans chaque grande ville comme Zurich ou Genève il y a toujours deux personnes ayant le même nombre de cheveux. (Pourquoi?)

2. Trois cercles  $k_1, k_2, k_3$  de rayon égal se coupent non-tangentielllement en un point  $P$ . Soient  $A$  et  $B$  les centres de  $k_1$  et  $k_2$ . Soit  $D$ , respectivement  $C$  le point d'intersection de  $k_3$  avec  $k_1$ , respectivement  $k_2$ , les deux différents de  $P$ . Montrer que  $ABCD$  est un parallélogramme.

**Exemple de solution.**

Soit  $M$  le milieu de  $k_3$  (voir l'image). Considérons le quadrilatère  $PBCM$ . Puisque les cercles ont le même rayon, tous les côtés de ce quadrilatère ont la même longueur. Ainsi  $PBCM$  est un losange et en particulier  $BC$  est parallèle à  $PM$ . De manière analogue nous pouvons montrer que  $AD$  est parallèle à  $PM$ . Ainsi  $AD$  est parallèle à  $BC$ . Par hypothèse ces deux segments sont de longueur égale et donc  $ABCD$  est un parallélogramme.

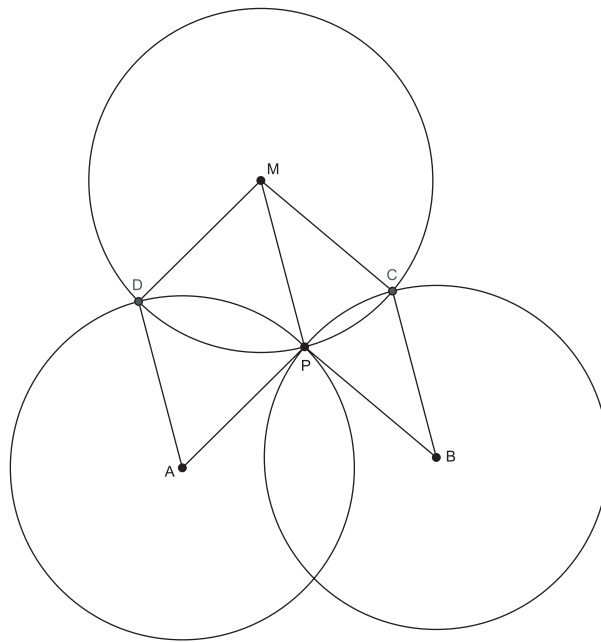


Fig. 1: Figur zur Lösung von Aufgabe 2

3. Un tournoi de tennis a eu au moins trois participants. Lors du tournoi, chaque deux joueurs ont joué exactement une fois l'un contre l'autre et chaque joueur a gagné au moins un match. Montrer qu'il existe trois joueurs  $A, B, C$  tels que  $A$  a battu  $B$ ,  $B$  a battu  $C$  et  $C$  a battu  $A$ .

**1ère solution.**

Choisissons un joueur  $A$  qui a gagné le moins de matchs parmi tous les joueurs. Soient  $U$  et  $V$  les ensembles de joueurs contre qui  $A$  a gagné resp. perdu. Par hypothèse  $U$  et  $V$  ne sont pas vides. Maintenant si un joueur  $B$  de  $U$  a perdu contre un joueur  $C$  de  $V$ , alors  $A, B, C$  satisfont les conditions recherchées et nous avons fini. Si par contre tous les joueurs de  $U$  ont perdu tous leurs matchs contre tous les joueurs de  $V$ , alors les joueurs de  $U$  ont gagné moins de matchs que  $A$ , une contradiction avec le choix de  $A$ .

**2ème solution.**

Chacun des  $n$  joueurs a gagné au moins 1 et au plus  $n - 1$  matchs. D'après le principe des tiroirs il y a alors deux joueurs  $A$  et  $B$  qui ont gagné le même nombre de matchs. Nous pouvons supposer que  $A$  a gagné contre  $B$  et nous appelons  $U$  l'ensemble de joueurs qui ont perdu contre  $B$ . Au moins un joueur  $C$  de  $U$  doit avoir gagné contre  $A$  car sinon  $A$  aurait gagné contre tous les joueurs de  $U$  et contre  $B$ , donc contre un joueur de plus que  $B$ .  $A, B, C$  satisfont les conditions de l'exercice.

4. Soient  $a, b, c$  des nombres naturels tels que  $a$  divise  $b^2$ ,  $b$  divise  $c^2$  et  $c$  divise  $a^2$ . Montrer que  $abc$  divise

$$a^7 + b^7 + c^7.$$

**Exemple de solution.**

Clairement  $a$  est un diviseur de  $a$ , car tout nombre naturel se divise lui-même. D'un autre côté, par hypothèse,  $c$  est un diviseur de  $a^2$ . Nous allons maintenant montrer que  $b$  est un diviseur de  $a^4$ . Puisque  $c$  divise  $a^2$ ,  $c^2$  doit diviser  $(a^2)^2 = a^4$ . Mais nous savons que  $b$  divise  $c^2$  donc  $b$  divise aussi  $a^4$ . Finalement cela implique que

$$a \cdot b \cdot c \quad \text{divise} \quad a \cdot a^4 \cdot a^2 = a^7.$$

De la même manière nous pouvons montrer que  $abc$  divise aussi  $b^7$  et  $c^7$ . Comme  $abc$  divise chaque terme séparément,  $abc$  divise aussi la somme  $a^7 + b^7 + c^7$ .

5. On couvre un carré  $6 \times 6$  par 18 dominos sans imbrications et sans dépasser les bords. Montrer qu'il existe toujours une droite qui coupe le carré en deux parties mais qui ne divise aucun des dominos.

**Exemple de solution.**

Raisonnons par absurde et supposons que chaque droite divise un domino. Subdivisons le carré en 36 carrés unité et considérons les  $2 \cdot 5$  droites qui coupent le carré  $6 \times 6$  mais aucun des carrés unité. Par hypothèse, chacune de ces droites divise au moins un domino. Nous allons même montrer que  $g$  divise au moins *deux* dominos.

La droite  $g$  divise le grand carré en deux rectangles de la forme  $6 \times k$  et  $6 \times (6 - k)$ . En particulier dans chacun des deux rectangles il y a un nombre pair de carrés unité. Chaque domino qui se trouve entièrement dans un des rectangles y couvre exactement deux carrés unité. Si un domino est coupé en deux par  $g$ , alors il couvre exactement un carré unité dans chacun des rectangles. Il s'ensuit directement que  $g$  doit couper en deux un nombre *pair* de dominos, car sinon il n'y aurait qu'un nombre impair de carrés unité couverts de chaque côté de la droite, une contradiction. En particulier nous pouvons conclure que  $g$  divise bien au moins deux dominos.

Chacune des dix droites coupe donc au moins deux dominos. De plus il est clair qu'un domino ne peut pas être coupé par plus qu'une droite à la fois. Il s'ensuit donc qu'on doit avoir au moins 20 dominos. Comme par hypothèse nous n'en avons que 18, nous obtenons la contradiction désirée.

**Remarques.** Ici nous avons appliqué un argument de *calcul double* pour obtenir la contradiction cherchée. Nous avons tout simplement supposé que l'affirmation soit fausse et puis nous avons compté les dominos *de deux manières différentes*. D'un côté nous en avons 18 par hypothèse, de l'autre nous avons obtenu au moins 20 par calcul.

La méthode du calcul double est très importante en combinatoire et donne souvent des solutions élégantes.